2

APOLLONII CONICA:

Methodo Nova Illuſtrata, & Succinctè DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-profeſſorem Lucaſianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,
Excudebat *Guil. Godbid,* vœneunt apud *Robertum Scott,*
in vico Little-Britain, 1675.

De Apollonio Pergæo, ex Vossio de Scriptoribus Mathematicis:

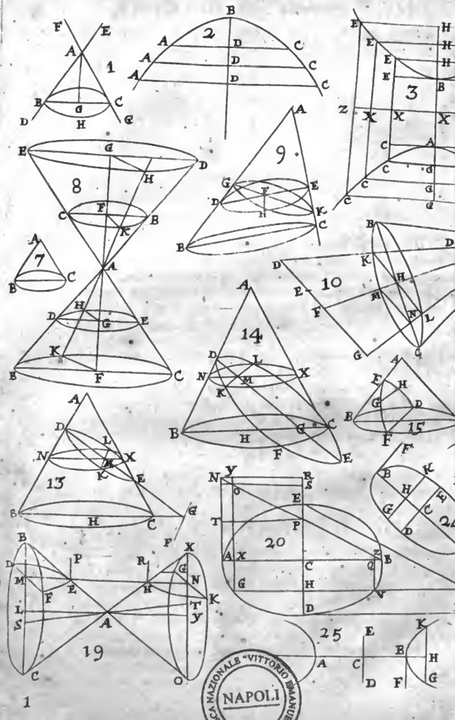
Proximæ post *Euclidem* antiquitatis, ex iis qui extant est Apollonius Pergæus, Claruit enim sub Ptolomæo Evergete.

N*Atus est Pergæ, civitate Pamphiliæ. De ætate autem ejus quod dixi auctor est* Heraclius *in* Archimedis *vita, & exinde* Eutocius Ascalonita *initio commentariorum in Conica* Apollonii. *Ubi ex* Gemini *Mathematicarum præceptionum libro sexto refert, ut ob conicam hanc scientiam à suæ ætatis hominibus nuncupatus sit* magnus Geometra, Euclidis *discipulos, quod & ipsum ætatem indicat*, Alexandriæ *audivit, à quibus cum multa accepisset; non difficile adeò fuit quatuor conicorum* Euclidis *libros commentario illustrare, ac totidem alios adjungere: ut in universum conicorum essent libri viij: sicut auctor est Pappus* Alexandrinus *libro vij Mathematicæ Collectionis.* Pag. 54.

Atque eodem libro alia quoque ejusdem Apollonii *memorat, videlicet libros duos* περὶ λόγου ἀποτομῆς, de proportionis sectione: *totidem* περὶ χωρίου ἀποτομῆς, de spatii sectione: *etiam duos* διωρισμένης τομῆς, determinatæ sectionis: *ac totidem* ἐπαφῶν, tactionum: *duos quoque* νεύσεων, inclinationum: *ac similiter duos* τόπων ἐπιπέδων, planorum locorum. *Quorum* Pappus *alios vocat* ἐφεκτικοὺς, in se solis consistentes: *alios* διεξοδικοὺς, extra sese tendentes. Pag. 55.

Cæterùm fuere olim, qui Conica non esse Apollonii Pergæi, *sed* Archimedis *putarent. Existimavit hoc* Heraclius *ille, qui* Archimedis *vitam retulit. Ejus verba inde adducit* Eutocius, *quibus ait* Archimedem *primum omnium consignasse* Elementa Conica: Apollonium *autem, cùm ea sciret necdum edita esse ab auctore, involâsse in illa, proque suis edidisse. Ac videtur id posse ipsius* Archimedis *verbis comprobari. Nam ipse operis de Conicis Elementis meminit partim libro* περὶ κωνοειδέων, καὶ σφαιροειδέων, *ante propositionem quartam. Utrobique enim ait, id, de quo loquitur demonstratum esse in libris Conicis. Nisi quis censeat, respici* Euclidis *quatuor Conicorum libros: quorum* Pappus *mentionem facit in septimo Mathematicarum Collectionum libro. Verum, si alienum opus signaret* Archimedes *non sic loqueretur. Solet enim tum dicere, priores id demonstrasse. Et sanè* Archimedi *non fuisse ignotum conos secari posse planis, quæ ad latus Coni habeant inclinationem differentem, satis comprobat contra* Eutocium, *& alios*, Guido Ubaldus *initio Commentarii in secundum* ἰσορροπικῶν Archimedis. *Quæ cùm considero, nolim de auctore multùm contendere. Et fortasse rudiores* Archimedis *chartas nactus fuit* Apollonius, *atque eas perfecit. Utcunque est, ante hæc de Conicis edita ab* Apollonio, *imperfecta erat eorum notitia: ut tradit* Eutocius Ascalonita Pag. 434.

initio



dicio,
aius ;
unde ,
allu-
ſmo-
; qui
mnia
erat
ctus ;
i lau-
iben-
: ut
enſet
tiam
enta-
atnor
ea ex
demia
litera
ertim
quid
ubi
quia
etera
llonii
xtare
iam ,
edin ;
ſcri-
anno.
i Pa-
ibibus
, qui
ligit ;
odo in
ſvis ,
lib. 1.
orbis
OL-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. I.

DEFINITIONES.

I.

SI ab aliquo puncto (A) ad circumferentiam Circuli (B H C,) qui non sit in eodem plano, in quo punctum, conjuncta recta linea (A B) in utramque partem producatur, & manente puncto (A) convertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri; superficiem (D A E F G) à recta linea descriptam, constantémq; ex duabus superficiebus (D A G, E A F) ad verticem (A) inter se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea (E A B D) quæ eam describit in infinitum aucta, voco *Conicam superficiem.* Fig. 1

II.

Verticem ipsius, manens punctum (A).

III & VI.

Axem, rectam lineam (A G), quæ per punctum (A), & circuli centrum (G) ducitur.

IV.

Conum autem voco figuram (A B C), contentam circulo (B H C), & conicâ superficie (B A C), quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interjicitur.

B V.

V & VII.

Basim, circulum ipsum (B H C).

VIII.

Conorum rectos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

IX.

Scalenos, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

X.

Fig. 2. Omnis curvæ lineæ (A B C) in uno plano existentis *Diametrum* voco, rectam lineam (B D,) quæ quidem ducta a linea curva, omnes lineas (A C), quæ in ipsa ducuntur cuidam lineæ (A C) æquidistantes, bifariam dividit.

XI.

Verticem lineæ rectæ terminum (A,) qui est in ipsa linea (A B C.)

XII.

Ordinatim ad diametrum *applicari* dicitur, unaquæque æquidistantium linearum (A C.)

XIII.

Fig. 3. Similiter, & duarum curvarum linearum (C A D, E B F) in uno plano existentium, *diametrum* quidem *transversam* voco, rectam lineam (A B), quæ omnes (C D, E F) in utraque ipsarum ductas, rectæ cuidam (C D, vel E F) æquidistantes bifariam dividit (in X.)

XIV.

Vertices, diametri terminos (A, B) qui sunt in ipsis lineis (C A D, E B F.)

XV.

Rectam verò *diametrum* (Z Y) voco, quæ inter duas lineas (C A D, E B F)

E B F) poſita, lineas omnes (C E, D F) ductas rectæ cuidam (A B) æquidiſtantes, & inter ipſas interjectas, biſariam ſecat (in Z vel Y.)

XVI.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidiſtantium (C D, vel E F ad A B; & C E, vel D F ad Z Y.)

XVII.

Conjugatas diametros voco curvæ lineæ (A Z B Y), & duarum curvarum (C A D, E B F) rectas lineas (A B, Z Y), quarum utraque diameter eſt, & rectas lineas (C D, C E) biſariam dividit. Fig. 4.

XVIII.

Axem verò curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam, quæ cùm ſit diameter curvæ lineæ, vel duarum curvarum, æquidiſtantes ad rectos ſecat angulos.

XIX.

Axes conjugatos curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectas lineas, quæ cùm ſint diametri conjugatæ, ipſis æquidiſtantes ad rectos angulos ſecant.

Nihilo differunt axes à diametris, niſi quòd indifferenter illæ, hi ad rectos tantùm ſecent.

Apollonius Eudemo.

S. D.

SI & corpore vales, & aliæ tuæ res ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis bellè habemus. Quo tempore tecum *Pergami* fui, animadverti te cupidum intelligendi Conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad Te primum librum emendatum, reliquos deinceps miſſurus, cùm animo ero tranquilliori; non enim arbitror te oblitum quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim; rogatus à *Naucrate* Geometrâ, quo tempore *Alexandriam* veniens apud nos fuit; & cur nos, cùm de illis octo libris egiſſemus, majorem ſtatim in his diligentiam adhibuimus. Nam cùm ipſe *Naucrates* quamprimum eſſet navigaturus, nos ea non emendavimus, ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt conſcripſimus, utpote qui ea poſtremò eſſemus percurſuri. Quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit nonnullos alios ex iis, qui nobiſcum fuerant, habuiſſe primum & ſecundum librum antequam emendaretur, noli mirari, ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi hujus diſciplinæ continent Elementa: quorum primus complectitur generationes trium Coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur, itemq; principalia ipſarum accidentia, à nobis & uberiùs & univerſaliùs, quàm ab iis qui de ea re ſcripſerunt elaborata. Secundus Liber tractat ea quæ attinet ad Diametros, & ad Axes Sectionum, & ad illas lineas *quæ cum ſectione non conveniunt; tum de aliis diſſerit, quæ & generalem & neceſſariam utilitatem ad determinationes afferunt. *Tertius liber continet multa & admirabilia Theo-

*ἀσυμπτώτους.

Theoremata, quæ utilia erunt & ad solidorum locorum compositiones, & ad determinationes; quorum complura & pulcherrima, & nova sunt. Hæc nos perpendentes animadvertimus, non positam esse ab *Euclide* rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas, verùm ipsius tantummodo particulam quandam, atque hanc non satis feliciter. Neque enim fieri poterat, ut ea compositio rectè perficeretur absque iis, quæ à nobis inventa sunt. Quartus liber tradit quot modis Conorum sectiones inter sese, & circuli circumferentiæ occurrere possint, & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum est; coni sectio, & circuli circumferentia, & oppositæ sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant. Reliqui autem 4 Libri ad abundantiorem scientiam pertinent. Etenim Quintus de Minimis & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & similibus Coni sectionibus. Septimus continet Theoremata, quæ determinandi vim habent. Octavus Problemata Conica determinata. At verò omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi sui sententia judicare. Vale.

LIB. I.

Prop. I.

RECtæ lineæ (A G) quæ à vertice (A) superficiei Conicæ ad puncta (G) quæ in superficie sunt, ducuntur, in ipsa superficie erunt. Fig. 5.

Cùm enim puncta A G sint in superficie conica, (*a*) recta ipsam describens per puncta A, G transibit. Itaque liquet tunc rectam A G in superficie conica existere. a *1. def. 1. hujus.*

Coroll. 1. Hinc constat, si à vertice ad aliquod punctum eorum quæ sunt intra superficiem, recta linea ducatur, intra, & si ad aliquod eorum quæ sunt extra, extra superficiem cadere. *Cor.*

Coroll. 2. Rectæ à vertice ad puncta, quæ in superficie, ductæ, basis circumferentiæ occurrent, si opus est, protractæ.

Prop. II.

Fig. 6. Si in alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, sumantur duo puncta (D,E), & quæ puncta conjungit recta linea (D E) ad verticem non p rtineat, intra superficiem cadit, quæ verò est in directam (E F) cadet extrà.

a 2 *Cor.* 1. 2 *hujus.* Conjungantur rectæ A D, A E [a] occurrentes basis circumferentiæ punctis B,G, quæ connectat recta B G; hæc[b] intra circulum cadet, ac
b 2. 3. proinde intra superficiem conicam; ergo [c] planum trianguli A B G
c 2. 11. est intra superficiem conicam; ergo recta D E in ipso sita [c] est intra
d 10. 3. eandem. Porro recta A F [d] cadit in B G protractam extra circulum;
e 1. *Cor.* 1 *hujus.* & [e] proinde extra superficiem conicam; ergo punctum F est etiam extra ipsam.

Prop. III.

Fig. 7. Si conus (A B C) plano per verticem (A) secetur, sectio (A B C) triangulum erit.

a 1. *hujus.* Nam A B & A C [a] rectæ sunt: item B C [b] est recta. [c] ergo ABC
b 3. 11. est triangulum.
c 20. *def.* 1.

Prop. IV.

Fig. 8. Si alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, secetur plano (D H E) æquidistante circulo (B K C), per quem fertur recta linea superficiem describens, planum (D H E) quod superficie concluditur, circulus erit, habens centrum (G) in axe (A F); figura verò (ADE) contenta circulo (D H E) & ea parte superficiei conicæ, quæ inter secans planum (D H E), & verticem (A) interjicitur, conus erit.

a 3. *hujus.* Planum per axem A F faciat [a] trigonum A B C; communisque
b 3. 11. sectio ejus cum plano D H E [b] sit recta D F. In sectione D H E suma-
c 2. *Cor.* 1. *hujus.* tur punctum utcunque H, ducaturque recta A H K [c] circumferentiæ
d *hyp* & 16. 11. basis occurrens in K, & connectantur G H, F K. Atq; ob D E, B C, ac
e 4. 6. G H, F K [d] parallelas, erit F B. G D [e] :: (A F. A G [e] ::) F K. G H.
f *hyp* & 15. *def.* 1. unde cùm F B F K [f] æquentur. [g] erunt etiam G D, G H æquales.
g 14. 5. idémque de reliquis à G ad sectionem ductis rectis ostendi poterit. Unde

de ſectio D H E [h] circulus erit, cujus centrum G, & [k] proinde figura A D E conus. h 15. *def.* 1. k 4 *def. hujus.*

Coroll. 1. Recta D E eſt diameter circuli D H E. l

2. Conus A D E [m] ſimilis eſt cono A B C (ob A G. G D :: A F. F B.) m 24 *def.* 11.

Prop. V.

Si conus Scalenus ſecetur plano (A B C) per axem ad rectos angulos ipſi baſi (B C), ſecetúrque altero plano (G H K) ad triangulum per axem recto, quod ex parte verticis (A) abſcindat triangulum (A G K) ſimile (ei A B C) quod per axem, * ſubcontrariè vero poſitam; ſectio (G H K) circulus erit. Vocetur autem Sectio ſubcontraria. Fig. 9.

In ſectione G H K accipiatur punctum H utcunque; à quo [a] ducatur H F recta plano A B C, quæ [b] in rectam G K cadet, & quidem [c] perpendiculariter, puta in F. per F ducatur D E ad B C parallela; eſtque planum per D E, H F [d] parallelum baſi B C; [e] efficitque ſectionem D H E circulum, in quo F D × F E [f] = F Hq. Quia vero ang. A D E [g] = (ang. A B C [h] =) ang. A K G, & ang. K F E [k] = G F D; æquiangula erunt trigona K F E, D F G. unde E F. F K [l] :: G F. F D. ergo F K × G F [m] = (E F × F D [n] =) H Fq. [o] quare ſectio G H K eſt circulus. Q.E.D.

a 11. 11. b 38. 11. c 3 *def.* 11. d 15. 11. e 4. *hujus.* f 35. 3. g 29. 1. h *hyp.* k 15. 1. l 4. 6. m 16. 6. n *priùs.* o *conv.* 35. 3.

Prop. VI.

Si conus plano (A B C) per axem ſecetur, ſumatur autem aliquod punctum (D) in ſuperficie coni, quod non ſit in latere trianguli per axem; & ab ipſo ducatur recta linea (D E) æquidiſtans cuidam rectæ (M N), quæ perpendicularis eſt à circumferentia circuli (BMC) ad trianguli baſin (B C); triangulo per axem occurret, & ulteriùs producta uſque ad alteram ſuperficiei partem, biſariam ab ipſo triangulo ſecabitur. Fig. 10.

Recta A D protracta circumferentiæ baſis occurrat puncto K; per quod ducatur K H L ad M N parallela; [a] adeóque ad D E. [b] ergo D E producta occurret rectæ A H, puta in F. Producatur D F ad ſuperficiem G. a 30. 1. b

Liquet rectam A L, (cùm ſit in plano A D E, vel A K L, & in ſuperficie coni) ipſi D F occurrere in G. & fore K H. D F :: (A H. A F ::) H L. F G. unde quum ſit K H = H L, erit D F = F G. *Q. E. D.*

Prop.

Propoſ. VII.

Fig. 11. Si conus plano (A B C) per axem ſecetur, ſecetur autem & altero plano (D F E) ſecanti planum baſis coni, ſecundùm rectam lineam (D E) quæ ſit perpendicularis, vel ad (B C) baſim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: lineæ (H K) quæ à ſectione (D F E), in ſuperficie coni à plano facta, ducuntur æquidiſtantes ei (D E), quæ eſt perpendicularis ad trianguli baſim (B C), in communem ſectionem (F G) plani ſecantis, & trianguli per axem, cadent. Et ſiquidem conus ſit rectus linea (D E), quæ eſt in baſi, perpendicularis erit ad (F G) communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem, ſi verò Scalenus, non ſemper, niſi cùm planum (A B C), quod per axem ducitur ad baſim coni (B D C E) rectum fuerit.

Quòd H K plano A B C, & proinde ejus cum plano D F E communi ſectioni F G occurrat, inque ipſo occurſu biſecetur, liquet ex præcedenti. Porro, ſi conus rectus ſit, erit circulus B C plano A B C
a 4. *def.* 11. rectus; [a] ac ideo D E plano A B C recta; & propterea D E ad F G perpendicularis. Idem diſcurſus valet, ſi trigonum A B C circulo B C utcunque rectum fuerit; ſin hoc non fuerit, non erit D E ad F G per-
b 4. 11. pendicularis: Nam ſi D E utrique B C, F G perpendicularis ſit, [b] erit
d 18. 11. eadem D E recta plano A B C; [d] unde circulus B C trigono A B C rectus erit, contra Hypoth.

Coroll. Hinc F G diameter eſt ſectionis D F E, utpote quæ rectas ad D E parallelas biſecat.

Prop. VIII.

Fig. 12. Si conus ſecetur plano (A B C) per axem, & ſecetur altero plano (D F E) ſecanti baſim coni (B D C) ſecundùm rectam lineam (D E), quæ ad (B C) baſim trianguli per axem ſit perpendicularis, diameter autem (F G) ſectionis factæ in ſuperficie, vel æquidiſtet uni (A C) laterum trianguli, vel cum ipſo extra coni verticem conveniat; & producantur in infinitum tum ſuperficies coni (A B C) tum planum ſecans (D F E); ſectio quoque ipſa (D F E) in infinitum augebitur; & ex diametro (F G) ſectionis ad verticem cuilibet lineæ datæ æqualem (CFH) abſcindet linea (M N H), quæ quidem à coni ſectione (MFN) ei (D E) quæ eſt in baſi, æquidiſtans ducta fuerit.

Nam-

Nam quia diameter F G cum latere A C ad partes X [a] nunquam convenient, si ipsa ad [b] libitum producatur, puta ad H, & per H ducantur K L ad B C, & M N ad D E parallelæ, [c] planum per K L, M N plano B D C E parallelum erit, inque superficie coni producta [d] circulum efficiet, ad quem si protrahatur planum D F E, liquet [d] augeri conum, & sectionem D F E &c. — a *Hypoth.* b 3. 1. c 15. 11. d 4. *hujus.*

Prop. IX.

Si conus (A B C) secetur plano (D K E) convenienti cum utroque latere (A B, A C) trianguli per axem, quod neque basi (B C) æquidistet, nec subcontrariè ponatur, sectio (D K E) circulus non erit. — Fig. 13. 14.

Si fieri potest, sit D K E circulus; & ab H basis centro ad F G (communem sectionem basis cum plano secanti) ducatur perpendicularis H G, per quam & axem transeat trigonum A B C. Dein sumatur quodvis punctum K in linea D K E, per quod ducatur K M L ad F G parallela, occurrens rectæ D E G (communi sectioni plani secantis, & trigoni A B C) in M. [a] unde K M = M L. — a 6. *hujus.*

Porrò, per M ducatur N X ad B G parallela. & quia planum per N X, K L, [b] plano B C parallelum est, * ideóque circulum efficit. In quo K L [b] diametro N X [c] est perpendicularis, erit N M × M X [d] = (K Mq. ([d] =) D M × M E. ([e] ob D K E circulum). [f] ergo N M. B M :: M E. M X. [g] ergo trigona N M D. E M X similia sunt: & ang. M E X = (ang. D N M [h] =) ang. A B C. Itaque sectio est [k] subcontraria, contra Hyp. ergo sectio D K E non est circulus. *Q. E. D.* — b 15. 11. * 14. *hujus.* c 10. 11. (6. d *cor.* 13. & 16. e *hyp.* f 17. 6. g 6. 6. h 29. 1. k 5. *hujus.*

Prop. X.

Si in coni sectione (F E D) sumantur duo puncta (G, H); recta linea (G H), quæ ejusmodi puncta conjungit, intra sectionem cadet, & quæ in directum ipsi constituitur, cadet extra. — Fig. 15.

Nam quia puncta G H [a] sunt extra latus trigoni (A B C) per axem ducti, recta G H non pertinget ad verticem A; [b] ergo hæc intra conum cadet, ac proinde intra sectionem; sin producatur extra conum cadet, ac proinde extra sectionem. — a *hyp.* b 2. *hujus.*

Prop. XI.

Si conus plano (A B C) per axem secetur, secetur autem & altero plano — Fig. 16.

C

plano (D F E), secante basim coni secundùm rectam lineam (D E), quæ ad basim (B C) trianguli per axem sit perpendicularis, & sit sectionis diameter (F G) uni (A C) laterum trianguli per axem æquidistans; recta linea (K L) quæ à sectione ducitur æquidistans sectioni (D E) plani secantis, & basis coni, usque ad sectionis diametrum (F G), poterit spatium æquale contento, lineâ (F L), quæ ex diametro abscissa inter ipsam (K L) & sectionis verticem (F) interjicitur, & alia quadam (F H) quæ ad lineam (A F) inter coni angulum (A) & sectionis verticem (F) interjectam, eam proportionem habeat, quam quadratum basis (B C) trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus (A B, A C) continetur. Dicatur autem hujusmodi sectio PARABOLE.

a 15. 11.
b 4. *hujus.*
c 10. 11.
d *cor.* 13. & 16. 6. e 1. 6.
f *hypoth.*
g 23. 6.
h 4. 6.
k 2. 6. l 9. 5.

Per L ducatur M N ad B C parallela; éstque sectio plani per M N, K L ducti (ad B D C E [a] paralleli) [b] circulus; [c] & K L ad M N perpendicularis; [d] unde K Lq = M L × L N. Porro F L × H F. F L × F A [e] :: (H F. F A [f] :: B Cq. A C × A B [g] = B C. A C. [h] (M L. F L) + B C. A B [h] (M L. F M, [k] vel L N. F A) = M L. F L + L N. F A [g] =) M L. × L N. F L × F A. [l] ergo M L × L N ([d] K Lq) = F L × H F. *Q. E. D.*

Propos. XII.

Fig. 17. Si conus plano (A B C) per axem secetur; secetur autem & altero plano (D F E) secanti basim coni secundùm rectam lineam (D E) quæ ad basim (B C) trianguli per axem sit perpendicularis; & sectionis diameter (F G) producta, cum uno latere (A C) trianguli per axem extra verticem coni conveniat in (H): recta linea (M N), quæ à sectione ducitur æquidistans communi sectioni (D E) plani secantis, & basis coni usque ad sectionis diametrum, poterit spatium (F N X P) adjacens lineæ (F L), ad quam ea (F H), quæ in directum constituitur diametro sectionis, subtenditúrque angulo (F A H) extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ (A K) quæ diametro (F G) æquidistans, ab vertice (A) sectionis usque ad trianguli basim (B C) ducitur, ad rectangulum basis partibus (B K, K C), quæ ab ea fiant, contentum, latitudinem habens lineam (F N), quæ ex diametro abscinditur, inter ipsam (M N), & sectionis verticem (F) interjectam, excedénsque figurâ (F N O L) simili, & similiter positâ ei, quæ continetur lineâ (H F) extra angulum subtensâ, & ea (F L), juxta quam possunt, quæ ad diametrum (F G) applicantur. Vocetur autem hujusmodi sectio *Hyperbole.*

Per

Per N ducatur RS ad BC parallela. Estque FN × HN. FN × NX[a] :: (HN. NX)[b] :: HF. FL[c] :: AKq. BK × KC[d] = AK. BK ([b]FG. GB, [b] vel FN. NR) + AK. KC. ([b]AG. GC. [b] vel HN. NS.) = FN. NR + HN. NS[d] =) FN × HN. NR × NS. ergo FN × NX[e] = (NR × NS[f] =) NMq. *Q. E. D.*

a 1. 6.
b 4. 6.
c *hyp.*
d 23. 6.
e 9. 5.
f 4. *hujus*, & *cor.* 13, *ac* 16. 6.

Prop. XIII.

Fig. 18.

Si conus plano (A B C) per axem secetur, & [*]secetur altero plano (E L D) conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque basi coni æquidistet, nec subcontrariè ponatur; planum autem, in quo est coni basis (BC), & secans planum conveniant secundùm rectam lineam (F G) quæ sit perpendicularis vel ad basim (B C) trianguli per axem, vel ad eam (B C K), quæ in directum ipsi constituitur; recta linea (L M) quæ à coni sectione ducitur, æquidistans planorum communi sectioni (F G) usque ad sectionis diametrum (E D) poterit spatium (E O X M) adjacens lineæ (E H), ad quam sectionis diameter (E D) eam proportionem habeat quam quadratum lineæ (A K) diametro (E D) æquidistantis à coni vertice (A) usque ad trianguli basin (B C) ductæ, habet ad rectangulum contentum basis partibus (BK, C K), quæ inter ipsam (A K) & rectas trianguli lineas (A B, A C) interjiciuntur; latitudinem habens lineam (E M), quæ ex diametro (E D) ab ipsa abscinditur ad sectionis verticem (E): deficiensque figurâ (O H N X) [*]simili, & similiter positâ ei, quæ diametro (E D) & lineâ (E H) juxta quam possunt, continetur. Dicatur autem hujusmodi sectio *Ellipsis*.

[*]Per M ducatur P M R ad B C parallela. Estque E M × D M. EM. × M X[a] :: (D M. M X[b] :: D E. E H[c] :: A Kq. BK × K C[d] = A K. B K ([b]E G. G B. vel [b] E M. M P) + A K. K C. ([b]D G. G C. [b] vel D M. M R) = E M. M P + D M. M R[d] =) E M × D M. M P × M R. ergo E M × M X[e] = (M P × M R[f] =) M Lq. *Q. E. D.*

a 1. 6.
b 4. 6.
c *hyp.*
d 23. 6.
e 9. 5.
f 4. *hujus.* & *cor.* 13. & 15. 6.

Prop. XIV.

Fig. 19.

Si superficies (B C A X O), quæ sunt ad verticem (A), plano non per verticem secentur, erit in utraque superficierum sectio (D E F, & G H K) quæ vocatur Hyperbole. Et duarum sectionum eadem erit diameter (M E, H N), lineæ verò (E P, H R), juxta quas possunt ordinatæ ad diametrum, æquidistantes ei, quæ est in basi coni, inter se æ-

 quales

quales erunt. Et figuræ transversum latus (E H) utrique commune; quæ scilicet inter sectionum vertices interjicitur. Vocentur autem hujusmodi sectiones *Opposita*.

Quòd utraque sectio D E F, G H K, sit Hyperbole; liquet ex 12mâ hujus. Porrò ductâ per A rectâ S A T ad M N parallelâ, est
a 4. 6. A S. B S[a] :: A T. T O. & A S. S C[b] :: A T. T X. Unde A Sq.
b hyp. B S. × S C ([b]hoc est H E. E P) :: A Tq. T O × T X ([b]hoc est E H.
c 9. 5. H R). [c] quare E P = H R.

Prop. XV.

Fig. 20. Si in Ellipsi à puncto (C) quod diametrum (A B) bifariam dividit,
Fig. 21. ordinatim ducta linea (D C E) ex utraque parte ad sectionem producatur, & fiat ut producta (D E) ad diametrum (A B), ita diameter (A B) ad aliam lineam (D F): Recta linea (G H) quæ à sectione ducitur ad productam (D E) diametro (A B) æquidistans, poterit spatium (D L) adjacens tertiæ proportionali (D F), latitudinem habens lineam, (D H) quæ inter ipsam & sectionem interjicitur, deficiensque figurâ (M K) simili ei, quæ continetur lineâ (D E) ad quam ducuntur, & eâ (D F) juxta quam possunt. Quòd si ulterius producatur (G H) ad alteram sectionis partem (V), bifariam secabitur ab ea (D E), ad quam applicata fuerit.

Sit A N linea, juxta quam possunt applicatæ ad A B: junctâque
B N, per G ducatur G X ad D E parallela, perque C & X ipsæ X O,
a 13. hujus. C P ad A N parallelæ; & per N, O, P ipsi A B parallelæ N R, O S,
b 4. 6. P T. Liquet igitur esse D Cq [a] = rectang. A P. & G Xq [a] = re-
c hyp. ctang. A O. Et ob A N. C P. (A T) [b] :: (A B. C B [c] :: 2. 1.) erit
d 1. 6. T N = A T. [d] unde rectang. A P = N P. [d] & rectang. X T [d] =
e 2. ax. 1. Y T [e] = N S (ob T O [f] = R O). ergo rectang. A O. ([a] G Xq) +
f 43. 1. O P [e] = (rectang. N P [d] = A P [a] = C Dq [g] =) H Cq (G Xq) +
g 5. 2. H E × H D. & proinde rectang. H E × H D [h] = rectang. O P. (P S
h 3. ax. 1. × S O). Item H E × H D. H L × H D [k] :: (H E. H L [l] :: D E. D F [m] ::
k 1. 6. D Eq. A Bq ([n] ob D E, A B, D F ÷÷) [o] :: C Dq ([a] P C × C A, vel
l 4. 6. P C × C B). C Bq [k] :: P C. C B [k] :: P S. S O [p] ::) P S × S O. [h](H E
m cor. 20. 6. × H D). S Oq. ergo H L × H D q = (S O q [r] =) H Gq. Quod erat
n hyp. primum. Porrò, ductis V Q ad G X, & Q Z ad A N parallelis, propter
o 15. 5. A X × X O [a] = (G Xq [r] = V Qq [a] =) A Q × Q Z [s], erit A Q. A X [s] ::
p 23. 6. (X O. Q Z [l] ::) X B. Q B, ergo dividendo X Q. X A :: X Q. Q B.
q 9. 5.
r 34. 1.
s 14. 6.

quare

quare XA = QB. item CA[v] = CB. [x]ergo CX = CQ; [t]hoc est HG = HV. Quod erat secundum. t 9. 5. v hyp.

Coroll. Itaque DE est diameter altera priori AB conjugata. x 3. ax. 1.

Schol.

Breviùs ita Calculum instituemus.

Sint $\begin{cases} BC, \text{ vel } CA = d. \\ AN = r. \\ CX, \text{ vel } HG = a. \end{cases}$ Fig. 22.

Est igitur $\begin{cases} BX = d + a. \\ AX = d - a. \end{cases}$

Est autem $2d \,.\, r :: d + a \,.\, \frac{r}{2} + \frac{ra}{2d}$ quare $d - a$ (AX) $\times : \frac{r}{2} + \frac{ra}{2d}$ hoc est $\frac{dr}{2} - \frac{raa}{2d} =$ GXq vel HCq. Item quia $2d \,.\, r$ (BA. AN) :: d. (BC). $\frac{r}{2}$. erit d(BC) $\times \frac{r}{2}$, h. e. $\frac{dr}{2} =$ DCq. Ergo DCq − HCq (h. e. HE $\times$ HD) $= \frac{raa}{2d}$. Porrò quia DCq. BCq (hoc est $\frac{dr}{2}$. dd) :: DEq. ABq :: DE. DF (ob DE, AB, DF ÷÷) :: HE. HL :: HE $\times$ HD. $\left(\frac{raa}{2d}\right)$. HL $\times$ HD :: $\frac{dr}{2}$. dd :: $\frac{r}{2}$. d :: $\frac{raa}{2d}$. aa. Erit HL $\times$ HD $= aa =$ HCq.

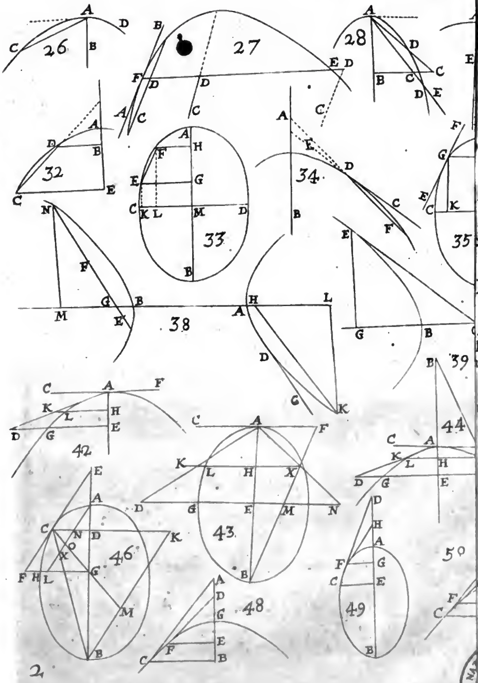
Simili discursu erit HL $\times$ HD = HVq. unde HG = HV.

Prop. XVI.

Si per punctum (C), quod transversum latus (AB) oppositarum sectionum bifariam dividit, recta quædam linea (CD) ordinatim applicetur, ipsarum diameter erit, priori diametro (AB) conjugata. Fig. 23.

Recta quæpiam GH ad AB parallela sectionibus occurrat punctis G, H, à quibus ordinatim applicentur GK, HL; sintque AE. BF recta sectionum latera, & junctæ AF, BE producantur; ducanturque KM, LN ad AE, BF parallelæ. Estque AK $\times$ KM [a] = (GKq [b] = HLq [a] =) BL $\times$ LN. Item AK $\times$ KM. AK $\times$ KB [c] :: (KM. KB [d] :: AE. AB [e] :: BF. BA [d] :: LN. LA [c] ::) BL $\times$ LN. BL $\times$ LA. ergo (ob AK $\times$ KM [f] = BL $\times$ LN) [g] erit AK $\times$ KB = BL $\times$ LA. [h] quare KB. BL :: LA, AK. & componendo KI.

a 13. hujus. b 34. 1. c 1. 6. d 4. 6. e 14. hujus. et 7. f priùs. g 14. 5. h 14. 6.



C K;
ipſam
L. ac
K =
A B)
ocetur
op-
, quæ
latera
dia-
m di-
s, &c
linea
onem
quod
Prop.

Prop. XVIII.

Si recta linea (A F B) sectioni occurrens (in F), productáque in utramque partem, extra sectionem cadat; sumatur autem aliquod punctum (C) intra sectionem, & per ipsam ei (A B), quæ sectioni occurrit, ducatur æquidistans (C D); ducta linea (C D), & producta, ex utraque parte sectioni occurret. Fig. 27.

Sumatur in sectione punctum quodvis E, & connectatur E F; hæc ipsi C D occurret; & siquidem inter puncta E F, manifestum est ipsam sectioni occurrere; sin extra, tum prius cum sectione conveniet. Simili discursu ad partes A F sectioni occurret.

Prop. XIX.

In omni sectione coni recta linea (B C) quæ à diametro (A B) ducitur, ordinatim applicatæ æquidistans, cum sectione conveniet. Fig. 28.

Sumatur aliquod punctum D in sectione, jungatúrque A D; hæc occurret ordinatim applicatæ ad A, ergo ad illam parallelæ A C; & siquidem inter puncta A D, tum B C [a] protracta sectioni occurret, sin extra, prius. a 10. *hujus.*

Prop. XX.

Si in Parabola duæ rectæ lineæ C E, D F à sectione ad diametrum (A B) ordinatim applicentur, ut earum quadrata inter se, ita erunt lineæ (A E, A F) quæ ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur. Fig. 29.

Sit A G latus rectum. itaque C Eq [a] = A E × A G. [a] & D Fq = A F × A G. ergo C Eq. D Fq [b] :: (A E × A G. A F × A G [c] ::) A E. A F. *Q. E. D.* a 11. *hujus.* b 7.5. c 3.6.

Conversim. Si sit C Eq. D Fq :: A E. A F, erunt puncta C, D in parabola.

Coroll. D F $\sqsubset$ C E.

Hæc prima & præcipua est parabolæ proprietas, ex ejus definitione emergens.

Prop. XXI.

Si in hyperbola, vel ellipsi vel circuli circumferentia, rectæ lineæ (D E, F G) ordinatim ad diametrum (A B) applicentur, erunt quadrata Fig. 30.

drata earum ad spatia contenta lineis (E B, E A, & G B, G A) quæ inter ipsas, & vertices (A, B) transversi lateris figuræ interjiciuntur, ut figuræ rectum latus (A C) ad transversum (A B); inter se verò ut spatia, quæ interjectis, ut diximus, lineis continentur.

a 4. 6. b 1. 6. c 12. hujus. d 11. 5. Per E, & G ducantur E H, G K ad A C parallelæ, occurrentes productæ B C in H, & K. Estque C A. A B [a] :: (H E. E B [b] ::) H E × E A([c] hoc est D Eq). E B × E A. Simili discursu C A.A B :: F Gq. G B × G A. Itaque D Eq. E B × E A [d] :: F Gq. G B × G A. & vicissim D Eq. F Gq :: E B × E A. G B × G A.

Coroll. In hyperb. F E ⊏ D E. (in ellipsi usque ad conjugatam ipsi A B diametrum; nam inde incipiunt ordinatim applicatæ decrescere.) *Sch.*

Conversim; si fuerit D Eq. E B × E A :: R T. vel D Eq. F Gq :: E B × E A. G B × G A. erunt puncta D, F in aliqua harum sectionum.

Hæc prima est & præcipua harum sectionum proprietas, ex ipsarum definitione resultans.

Coroll. D Eq. E B × B A :: Tq. Mq.

Viam jam sternit ad sectionum tangentes indagandas.

Prop. XXII.

Fig. 31. 32. Si Paraboloen, vel hyperbolen recta linea (C D) in duobus punctis (C, D) secet, non conveniens cum sectionis diametro (A B) intra sectionem, producta cum eâdem diametro extra sectionem conveniet.

a cor. 20. & b cor. 21. hujus. Ordinatim applicentur C E, D B: sunt hæ inæquales, & [a] minor D B, [b] ergo juncta C D producta cum E A conveniet extra sectionem ad partes A. *Q. E. D.*

Prop. XXIII.

* id est, conjugatas. Si ellipsin secet recta linea (E F) inter duas *diametros (A B, C D) producta, producta cum utraque earum conveniet, extra sectionem.

Fig. 33. a 21. hujus. b 5. 2. c 14. 5. Ordinatim applicentur E G, F H, atque ob E Gq. F Hq [a] :: B G × G A. B H × H A, [b] & B G × G A ⊏ B H × H A (est enim punctum G propius centro M, quàm punctum H); [c] erit E Gq ⊏ F Hq. & E G ⊏ F H. ergo E F producta cum diametro B A conveniet, ad partes

partes A. Simili discursu eadem F E diametro D C occurret ad partes C.

Coroll. E G ⊏ F H.

Prop. XXIV.

Si parabolæ, vel hyperbolæ recta linea (C E) in uno puncto (D) occurrens, & producta ex utrâque parte, extra sectionem cadat, cum diametro (A B) conveniet. Fig. 34.

Sumpto quolibet in sectione puncto F, jungatur F D; [a] hæc diametro occurret; puta in A; hanc verò decussat ipsa C D (in D). ergo C D producta diametro occurret; inter A scilicet & sectionem. a 22. *hujus.*

Prop. XXV.

Si ellipsi recta linea (E F) occurrens (in G), inter duas diametros (A B, C D) & producta ex utrâque parte cadat extra sectionem, cum utrâque diametro conveniet. Fig. 35.

Ordinatim applicetur G K; hæc diametro A B est parallela: ergo E F cum A B conveniet. Simili discursu, F E cum C D conveniet.

Prop. XXVI.

Si in parabola, vel hyperbola ducatur recta linea (C D) sectionis diametro (A B) æquidistans, in uno tantùm puncto (E) cum sectione conveniet. Fig. 36.

Quod conveniet C D cum sectione, patet, (quoniam distantia parallelarum C D, A B est finita, sectio autem in infinitum potest augeri; adeóque ducta aliqua ab A B ordinatim applicata ad sectionem, excedet istam distantiam.) Conveniat in E; & ordinatim applicetur E F: ergo cùm omnes ordinatim applicatæ ad partes D [a] majores sint quàm E F, ad partes verò C minores, liquet C D nusquam convenire cum sectione, præterquam in E. a *cor.* 20. & *cor.* 21. *hujus.*

Prop. XXVII.

Si parabolæ diametrum (A B) secet recta linea (C D), producta in utramque partem cum sectione conveniet. Fig. 37.

Sit A E ordinatim applicatis parallela; si C D huic parallela sit,

a 19. *hujus.*
b 17. *hujus.*
c 11. 6.
d 19. 5.
e 4. & 22. 6.
f 22. 6.
g *conſt.* & *cor.* 20. 6.
h *conv.* 20. *hujus.*

[a] liquet ipſam utrinque ſectioni occurrere; ſin minùs, producta conveniet cum A E, puta in E, [b] ergò priùs cum ſectione, puta in G; ordinatim igitur applicetur G F; [c] fiátque A F. A D :: AD. AB. [d] unde F D. D B :: A D. A B. ductâ igitur B C ad G F parallela erit, F Dq. D Bq. ([e] hoc eſt G Fq. B Cq) [f] :: A Dq. A Bq [g] :: A F. A B. ergo cùm ſit G Fq. B C q :: A F. A B, [h] erit punctum C in ſectione: quare C D utrinque ſectioni ocurrit.

Prop. XXVIII

Fig. 38.

Si recta linea (C D) unam (A) oppoſitarum ſectionum contingat, ſumatur autem punctum (E) intra alteram ſectionem (B), & per ipſum linea (E F) contingenti æquidiſtans ducatur, producta ad utramque partem cum ſectione (B) conveniet.

a 4. 6.
b *conſtr.*
c 14. 5.
d *conſtr.* & *Sch.* 48. 1.
e 7. 5.
f 21. *hujus.*

Nam quia C D diametro occurrit, eidem occurret E F, puta in G. Sit A H = B G, & per H ducatur H K ad C D vel E F parallela, ſectioni occurrens in K, & ordinatim applicetur K L, ſumatúrque G M = H L; denique ducatur M N ad K L parallela. Eſtque H L. L K :: [a] G M. M N. ergo (ob H L [b] = G M) [c] erit L K = M N. [d] Item B L × A L = A M × B M. quare B L × A L. L Kq [e] :: A M × B M. M Nq. [f] unde punctum N erit in ſectione B. Simili argumento ex altera parte occurret ipſa E F ſectioni.

Prop. XXIX.

Fig. 39.

Si in oppoſitis ſectionibus recta linea (C D) per centrum (C) ducta occurrat uni ſectioni (A), ulteriùs producta alteram quoque (B) ſecabit.

a 21. *hujus.*
b *conſtr* & *ſch.* 48. 1.
c 14. 5.
d *conſtr.*
e 29. 1.
f 4. 1.
g *Sch.* 15. 1.

Ad diametrum A B ordinatim applicetur D F, fiátque B G = AF, & ordinatim ducatur G E, jungatúrque C E. éſtque B F × A F. D Fq [a] :: T. R [a] :: A G × B G. G Eq. ergo cùm [b] ſit B F × A F = A G × B G. [c] erit D Fq = G Eq & D F = G E. [d] Item C F = C G. & ang. F [e] = ang. G. [f] ergo ang. F C D = G C E: [g] quare linea D C E eſt una recta, ſectioni B occurrens in E.

Coroll. 1. D F = E G.

2. C D = C E; (ob trigona C F D, C G E ſimilia, & latera C F, C G æqualia.)

Prop.

Prop. XXX.

Si in ellipsi vel oppositis sectionibus ducatur recta linea D E, ad utrasque partes centri (C) sectioni occurrens, ad centrum (C) bifariam secabit. Fig. 40.

In oppositis sectionibus patet * ex præcedenti. In ellipsi verò ad di- * *cor. 2. præc.*
ametrum A B ordinatim applicentur D F, E G. Et quoniam B F × a *21. hujus.*
F A. A G × G B [a] :: (D Fq. G Eq [b] ::) F Cq. G Cq. & permutan- b *4. 6. & 22. 6.*
do B F × F A. F Cq :: A G × G B. G Cq. & componendo A Cq. c *5. 2.*
(B F [c] × F A + C Fq). F Cq :: B Cq. [c] (A G × G B + G Cq) d *constr. & 10. def. hujus.*
G Cq. sitque A C [d] = B C. [e] erit F C = G C; & propterea C D e *14. 5.*
[f] = C E. f *4. 6.*

Coroll. C G = C F, & G E [f] = D F; & G B [g] = F A. & B F g *3. ax. 1.*
[g] = A G. & B F × F A [h] = A G × G B. h *Sch. 48. 1.*

Prop. XXXI.

Si in transverso figuræ latere (A B) hyperbolæ, sumatur aliquod punctum (C) non minorem (C B) abscindens ad verticem sectionis, quàm sit dimidia transversi lateris (A B) figuræ, & ab ipso (C) recta linea (C D) sectioni occurrat, si producatur, intra sectionem ad sequentes ipsius partes (E) cadet. Fig. 41.

Sit primò A C = C B. & ordinatim applicentur D H, * F E G. * utcunque hæc
Et quia C Gq. C Bq [a] $\sqsubset$ C Hq. C Bq. erit per conversam rationem ad partes E.
C Gq. C Gq — C Bq $\sqsupset$ C Hq. C Hq — C Bq. & inversè C Gq a *8. 5.*
— C Bq. C Gq $\sqsubset$ C Hq — C Bq. C Hq. & permutatim, C Gq b *6. 2.*
— C Bq. [b] (A G × G B.) C Hq — C Bq [b] (A H × H B) $\sqsubset$ (C Gq. c *4. & 22. 6.*
C Hq [c] ::) G Eq. H Dq). ergo cum A G × G B. A H × H B [d] :: G Fq. d *21 hujus.*
H Dq. erit G Fq. H Dq [e] $\sqsubset$ G Eq. H Dq. [f] ergo G F $\sqsubset$ G E. ergo e *13. 5.*
C D E intra sectionem cadit. f *10. 5.*

Quòd si ab aliquo puncto in A C (posito C centro) ad punctum D ducatur recta, hæc ipsam C D decussabit in D, adeóque magis intra sectionem cadet.

Coroll. Hinc, linea hyperbolem contingens, diametrum secat inter verticem, & centrum sectionis: unde multò magis

Linea quæ duobus punctis secat (vel quæ tangenti parallela esse poterit) diametro occurret inter verticem & centrum.

Prop. XXXII.

Fig. 42. Si per coni sectionis verticem (A) ducatur recta linea (A C) ordinatim applicatis æquidistans, sectionem continget, & in locum (CAG), qui inter coni sectionem & rectam lineam (A C) interjicitur, altera recta linea non cadat.

Fig. 43. 44. Si fieri potest, cadat A D, & à puncto D (utcunque sumpto in A D) ordinatim applicetur D G E. Sintque A F, B A latera figurarum. Jam in parabola fiat A F. A H :: D Eq. A Eq. & ducatur H K ad E D
a 11. *hujus.* parallela, sectioni occurrens in L. Estque A F × A H [a] (L Hq). AHq
b 1. 6. [b] :: (A F. AH [c] :: D Eq. A Eq. [d] ::) K Hq. A Hq. [e] ergo L H = KH.
c constr. [f] *Q. E. A.*
d 4. & 22. 6.
e 9. 5. In reliquis sectionibus, præter hæc, connexa B F producatur; &
f 9. ax. 1. per E ducatur E M N ad A F parallela, fiatque A E × E N = D Eq, & juncta A N secet B M in X; ducantur X H ad A F, & H K ad AC
g 12. *hujus.* parallelæ. Estque X H × A H [g] (L Hq). A Hq [h] :: (X H. A H [h] ::
h 4. 6. N E. E A [h] :: N E × E A [g] (D Eq). E Aq [d] ::) K H q. A Hq. ergo L Hq [f] = K Hq. & L H = K H, pars toti æqualis. [f] *Q. E. A.*

Cor. Si duæ sectiones sese contingant, quæ harum unam contingit recta, alteram quoque continget.

Prop. XXXIII.

Fig. 45. Si in parabola, sumatur aliquod punctum (C), à quo recta linea (CD) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; & ei (E D) quæ ab ipsa ex diametro abscinditur ad verticem, æqualis (A E) ponatur in directum ab ejus extremitate (E): recta linea (A C), quæ à facto puncto (A) ducitur ad illud (C) qood sumptum fuerat, sectionem continget.

a *Not. infra.* Sumpto utcunque puncto F in A C, ordinatim applicetur F B,
b 4. ax. 1. sectioni occurrens in G. Et quoniam 2 A E × E B [a] $\sqsupset$ A Eq +
c 4. 6. E Bq; erit 4 A E × E B [b] $\sqsupset$ (A Eq + E Bq + 2 A E × EB [c] =)
d 13. 5. A Bq; [c] atqui 4 A E × E D. = A Dq. ergo 4 A E × E B. A Bq
e 1. 6. [d] $\sqsupset$ 4 A E × E D. A Dq. & permutando 4 A E × E B. 4 A E ×
f 20. *hujus.* E D ([e] hoc est, E B. E D, [f] vel G Bq. C D q) $\sqsupset$ A Bq. A Dq.
g 4. & 22. 6. ([g] vel F Bq. C Dq) [h] ergo G B. C D $\sqsupset$ F B. C D. [k] quare G B.
h 22. 6.
k 10. 5. $\sqsupset$ C D. unde punctum F est extra sectionem; idemque de reliquis

rectæ.

rectæ A C punctis simili discursu ostendetur. ergo recta A C F sectionem contingit. *Q. E. D.*

Not. 2 A E × E B ⊐ A Eq + E Bq. Nam A Eq + E Bq = [z] 2 A E × E B + Quad: A E — E B ([z] hoc est + A Eq + E Bq — 2 A E × E B). z cor. 7. 2.

Prop. XXXIV.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum (C), ab eoque recta linea (C D) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur, & quam proportionem habent lineæ (BD, AD), interjectæ inter ordinatim applicatam (C D) & (A, B) terminos transversi lateris (A B) figuræ, eandem habeant inter se (B E, E A) partes lateris transversi, ita ut quæ sunt ad verticem partes sibi ipsis respondeant (B D. D A :: B E. E A); recta linea (E C) conjungens punctum (E) quod in transverso latere sumitur, & punctum (C) quod est in sectione, sectionem ipsam continget. Fig. 46. 47.

Sumpto utcunque puncto F in E F ordinatim applicetur F G, sectioni occurrens in H. & per A, B puncta ducantur A L, B K ad E F parallelæ, & protrahantur D C K, B C X, G C M. Estque B K. A N [a] :: (B D. D A [b] :: B E. E A [a] :: B C. C X [a] ::) B K. N X. [c] ergo N X = A N. quare N X × A N [d] ⊏ A O × O X. [e] ideoque NX. O X [f] (hoc est K B M B.) [c] ⊏ A O. A N unde K B × A N ⊏ MB × A O. [g] ergo K B × A N. C Eq ([h] hoc est B D × D A. D Eq.) ⊏ B M × A O. C Eq [h] (hoc est B G × G A. G E q) & permutando B D × D A. B G × G A [k] (hoc est C Dq. H Gq) ⊏ D Eq. G Eq. [l] (C Dq. F Gq) [m] ergo C D. H G ⊏ C D. F G. [n] ergo H G ⊐ F G. quare punctum F extra sectionem existit. Quare E F sectionem contingit.

a 4. 6.
b hyp.
c 9. 5.
d 5. 2.
e Not. 2. infra.
f Not. 1.
g 8. 5.
h 3. Not.
k 21. hujus.
l 4, & 22. 6.
m 22. 6.
n 10. 5.

Notæ.

1. Quòd sit N X. O X :: K B. M B; sic patet: quoniam N O. K M [o] :: (O C. C M [o] ::) O X. M B, & permutatim N O. O X :: K M. M B. erit componendo N X. O X :: K B. M B. o 4. 6.

2. Quòd sit N X. O X ⊏ A O, A N, sic ostenditur. Sit R × S [p] ⊏ X × Y. Dico R. X ⊏ Y. S. Sit enim R S = X Z. [p] ergo Z ⊏ Y. [q] ergo Z. S [r] (hoc est R. X) ⊏ Y. S. p sch. 43. 1. q 8. 5. r 17. 6.

3. Quòd sit K B × A N. C Eq :: B D × D A. D Eq, ita constabit: quoniam A N. C E [s] :: A D. D E. & C E. K B [s] :: D E. D B erit ex s 4. 6.

æquo

t 1. 6. u 4. & 22. 6. æquo A N. K B t (A Nq. A N $\times$ K B) :: A D. D B t (A Dq. A D $\times$ D B). u Item C Eq. A Nq :: D Eq. A Dq. ergo rursus ex æquo C Eq. A N $\times$ K B :: D Eq. A D $\times$ D B, ac inversè.

Coroll.

Hinc si $\frac{T \times AD}{T + 2AD} = AE$ in hyperbola, vel $\frac{T \times AD}{T - 2AD}$ in ellipse, erit E C tangens.

Prop. XXXV.

Fig. 48. Si parabolen recta linea (A C) contingat, conveniens cum diametro (A B) extra sectionem (in A), quæ (C B) à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abscindet ex diametro ad verticem sectionis lineam (B G) æqualem ei (G A), quæ inter ipsam & contingentem interjicitur; & inter locum, qui est inter contingentem, & sectionem, alia recta linea non cadet.

a 33. hujus. b 14. ax. 1. Si fieri potest, sint A G, G B inæquales; ipsique A G æqualis ponatur G E; & ordinatim applicetur E F. a ergo ducta A F sectionem continget, & rursus occurret ipsi A C. b *Q. E. A.*

Porro dic aliquam D C sectionem inter & A C cadere; fiátque G E = G D. & ordinatim applicetur E F. a ergo ducta D F tanget sectionem, ipsámque D C iterum decussabit. b *Q. E. A.*

Prop. XXXVI.

Fig. 49. 50. Si hyperbolen vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea (C D) conveniens cum transverso figuræ latere (B A), & à tactu recta linea (C E) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; erit ut linea (B D) quæ interjicitur inter contingentem, & terminum (B) transversi lateris ad (D A) interjectam inter eandem, & alterum lateris terminum (A), ita linea (B E), quæ est inter ordinatim applicatam (C E) & lateris terminum (B) ad eam (E A), quæ est inter eandem (C E) & alterum terminum (A), adeo ut continuatæ inter se sint, quæ sibi ipsis respondent (B D. D A :: B E. E A). Et in locum, qui inter contingentem, & sectionem coni interjicitur, altera recta linea non cadet.

a 34. hujus. b 14. ax. 1. Si enim non sit B D. B A :: B E. E A; sit B D. D A :: D G. G A. & ordinatim applicetur G F; a ergo ducta D F sectionem continget, iterúmque conveniet cum recta b D C. *Q. E. A.*

Quin-

Quinetiam si aliqua H C intercedat, fiat B H. H A :: B G. G A. & applicetur G F ordinatim : [a] itaque juncta H F sectionem continget, [b] ipsamq; D G bis decussabit. *Q. E. A.*

r. Hinc si C D tangat, erit in hyperbola $A G = \frac{T \times AD}{T - 2\,AD}$;
in ellipse $A G = \frac{T \times AD}{T + 2\,AD}$.

Not. In hyperbola $AG \sqsubset AD$: quia $T - 2\,AD \sqsupset T$.
In ellipse $AG \sqsupset AD$, quia $T + 2\,AD \sqsubset T$.

Prop. XXXVII.

Si hyperbolen vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea (C D) contingens cum diametro (A B) conveniat, & à tactu (C) ad diametrum linea (C E) ordinatim applicetur ; quæ (E F) interjicitur inter applicatam (C E) & sectionis centrum (F), unà cum interjecta (D F) inter contingentem (C D) & sectionis centrum (F) ; continebit rectangulum æquale quadrato lineæ F B, quæ est ex centro sectionis ; sed unà cum ea (E D) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, continebit spatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ (CE), eandem proportionem habet, quam transversum figuræ latus ad rectum. Fig. 51. 52.

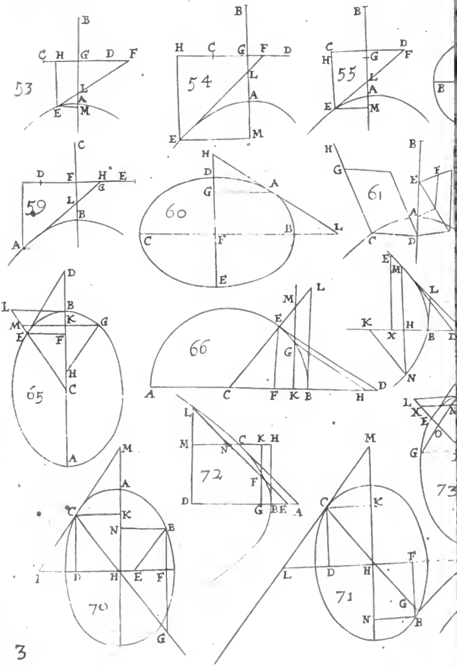
Nam A E. E B [a] :: A D. D B ergo componendo A E + E B. E B :: A D + D B. D B quare (in hyperbola) bipartiendo antecedentes, F E. E B :: F B. D B. & per conversam rationem, F E. F B :: F B. F D. [b] unde F E × F D = F Bq. *Q. E. D.*
Item, inversè F B [c] (A F) F E :: (F D. F B [d] ::) D B. (F B — F D). E B (F E — F B). ergo componendo. A E. F E :: D E. E B. ergo F E × D E [e] = A E × E B. quare F E × D E. C Eq [f] :: (A E × E B. C Eq [g] ::) T.R. *Q. E. D.*
In Ellipsi verò & circulo, ob A E + E B. E B :: A D + D B. D B. erit quoque (bipartiendo antecedentes,) F B. E B :: F D. D B. & per conversam rationem F B. F E :: F D. F B. unde F E × F D [h] = F Bq. hoc est D E × F E + F Eq [k] = (F Bq =) A E × E B + F Eq [m] ergo D E × F E = A E × E B. & D E × F E. C Eq [n] :: (A E × E B. C Eq [o] ::) T.R.

a 36. hujus.
b 17. 6.
c hyp.
d 19. 5.
e 16. 6.
f 7. 5.
g 21. hujus.
h 17. 6.
k 3. 2.
l 5. 2.
m 3. ax. 1.
n 7. 5.
o 21. hujus.

Coroll. F E, F B, F D sunt $\div\!\div$.

$$\left\{\begin{array}{l} FE.\ EB :: FB.\ DB. \\ FB.\ BE :: FD.\ DB. \\ FB.\ FD :: BE.\ DB. \end{array}\right.$$

Hinc



3

Prop. XXXIX.

Si hperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (C D) cum diametro (A B) conveniat (in D); & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C E); ſumptâ quàvis lineâ ex duabus, quarum altera (E F) interjicitur inter applicatam (C E), & ſectionis centrum (F); altera (E D) inter applicatam, & contingentem (C D); habebit ad eam applicata (C E) proportionem compoſitam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum (E F, E D) ad applicatam (C E), & ex proportione, quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum. Fig. 57. 58.

Sit E F. C E :: G. E D. [a] vel E F × E D = C E × G. ergo C Eq. a 16. 6.
C E × G [b] (C E. G) [c] :: (C Eq. E F × E D :: [d]) R. T. atqui C E. b 1. 6.
E D [e] = C E. G -|- G. E D ([f] -|- E F. C E.) ergo C E. E D = c 7. 5.
R. T. -|- E F. C E. *Q. E. D.* d 37. *hujus.*
e 5. *def.* 6.
f *conſtr.*

Prop. XL.

Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam recta linea (A H) contingens (in A) conveniat cum ſecunda diametro (D E); & à tactu (A) ad eandem diametrum (D E) applicetur linea (A G) æquidiſtans alteri diametro (B C); ſumptâ quâlibet lineâ ex duabus; quarum una (G F) inter applicatam (A G) & ſectionis centrum (F) interjicitur, altera (G H) inter applicatam, & contingentem: habebit ad ipſam applicata (A G) proportionem compoſitam ex proportione, quam habet tranſverſum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum linearum (G F, G H) habet ad applicatam (A G). Fig. 59. 60.

Sit G H. A G :: K. G F. [a] vel G H × G F = A G × K. ergo A Gq. a 16. 6.
G H × G F [b] (T. R.) [c] :: (A Gq. A G × K [d] ::) A G. K. atqui A G. b 38. *hujus.*
G F [e] = A G. K -|- K. G F [f] (-|- G H. A G). ergo A G. G F = c 7. 5.
T. R. -|- G H. A G. *Q. E. D.* d 1. 6.
e 5. *def.* 6.
f *conſtr.*

Prop. XLI.

Si in hyperbola, vel Ellipſi, vel circuli circumferentia ordinatim applicetur recta linea (CD) ad diametrum (AB); & ab applicata (C D), & ea (E A) quæ ex centro, deſcribantur parallelogramma æquian- Fig. 61. 62.

augula (D G, A F); habeat autem applicata (C D) ad reliquum latus (C G) parallelogrammi (D G) proportionem compositam ex proportione, quam habet ea quæ ex centro (E A) ad reliquum latus (E F), & ex proportione, quam rectum figuræ sectionis latus (R) habet ad transversum (T); parallelogrammum factum à lineâ (E D) quæ inter centrum (E) & applicatam (C D) interjicitur, simile parallelogrammo (A F), quod fit ab ea (E A) quæ ex centro, in hyperbola quidem majus est, quàm parallelogrammum (D G) ab applicata (D C), parallelogrammo (A F) ab ea (E A) quæ ex centro; In ellipsi vero, & circuli circumferentia, unà cum parallelogrammo (D G) quod fit ab applicata, æquale est parallelogrammo (A F) ab ea, quæ ex centro.

a 21. *hujus.*
b 1. 6.
c 9. 5.
d *constr.*
e *hyp.*
f 5. *def.* 6.
g 1. 6.
h *priùs* & 7. 5.
k 22. 6.
l 6. 2.
m 19. 5.
n 5. 2.
o 22. 6.

Fiat R. T [a] (hoc est D Cq. B D × D A) :: D C. C H [b] (hoc est D Cq. D C × C H). [c] ergo B D × D A = D C × CH. item D C. C H + A E. E F [d] = (R. T + A E. E F [e] = D C. C G [f] =) D C. C H + C H. C G. quare A E. E F [b] (hoc est A Eq. A E × E F) :: (C H. C G [g] :: C H × D C. C G × D C [h] ::) B D × D A. C G × D C. permutandóq; B D × D A. A Eq :: (C G × D C. A E × E F [k] ::) *pgr.* D G. F A. ergo in hyperbola componendo *pgr.* D G + F A. *pgr.* F A :: D Eq. [l] (B D × D A + A Eq). A Eq.

In Ellipsi verò & circulo, permutando A Eq *pgr.* F A :: (B D × D A. *pgr.* D G [m] ::) D Eq [n] (A Eq — B D × D A). *pgr.* F A — D G & permutando D Eq. A Eq :: *pgr.* F A — D G. *pgr.* F A. quare si fiat ex D E parallelogrammum simile ipsi A F [o]; liquet propositum.

Coroll. Quæ de parallelogrammis ostensa sunt, eadem valent in trigonis horum dimidiis.

Prop. XLII.

Fig. 63.

Si parabolen contingens recta linea (C A) cum diametro (A B) conveniat in A; & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C H); sumpto autem quovis puncto (D) in sectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ (D E, DF), altera quidem (D E) æquidistans contingenti (C A); altera vero (D F) æquidistans ei (C H), quæ à tactu (C) ordinatim est appplicata; triangulum (E D F) quod ab ipsis constituitur, æquale erit parallelogrammo (F G) contento linea (C H) à tactu applicata, & ea (F B), quæ interjicitur inter æquidistantem (D F) & sectionis verticem (B.)

a 35. *hujus.*
b *ax.* 41. 1.

Nam ob A H [a] = 2 H B, [b] erit triang. C H A = *pgr.* H G. quare *pgr.*

pgr. H G. triang. D F E [c] ::(triang. C H A. D F E [d] :: C Hq. D F q [e] :: H B. F B [f] ::) *pgr*. H G. *pgr*. F G. [g] ergo triang, D F E = *pgr*. F G. *Q. E. D.* c 7. 5. d 22. 6. e 20. *hujus*. f 1.6. g 9. 5.

Prop. XLIII.

Si hperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) conveniat cum diametro (A B); & à tactu (E) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (E F), huic verò per sectionis verticem (B) ducatur æquidistans (B L), quæ cum linea (E C) per tactum (E) & centrum (C) conveniat in (L); & sumpto in sectione aliquo puncto (G), ab eo ad diametrum ducantur duæ lineæ (G H, G K) una quidem (G H) æquidistans contingenti (E D), altera vero (G K) æquidistans ei (E F), quæ à tactu applicata est: triangulum (G K H) ab ipsis factum in hyperbola minus erit, quàm triangulum (C K M) quod abscindit linea (C E) per centrum & tactum ducta, triangulo (C B L) ab ea (C B) quæ ex centro simili abscisso: in ellipsi verò, & circuli circumferentia una cum triangulo (C K M) abscisso ad centrum æquale erit triangulo (C B L), simili abscisso, quod describitur ab ea (C B) quæ ex centro. Fig. 64. 65. 66.

Nam G K KH [a] = (EF. F D [b] = C F. F E + R. T [c] =) C B. B L + R. T. unde triang. G H K, æquatur excessui triangulorum C K M, B C L. *Q. E. D.* a 4. 6. b 39. *hujus*. c 4. 6. d *cor*. 41. *hujus*.

Coroll. Triang. G K H = 4 laterum K B L M.

Schol.

Triang. C B L = triang. C D E. *Vid. Eut.*

Prop. XLIV.

Si unam oppositarum sectionum contingens recta linea (F G) contingens cum diametro (A B) conveniat (in G); à tactu verò (F) ad diametrum ordinatim applicetur linea (F O); atque huic per alterius sectionis verticem (B) ducatur æquidistans (B L), ut conveniat cum linea (F C) per tactum (F) & centrum (C) ductâ; sumpto autem quovis in sectione puncto (N), applicentur ad diametrum duæ lineæ (N K, N H), quarum altera (N K) æquidistet contingenti (F G), altera æquidistet ei (F O) quæ à tactu ordinatim applicata est; triangulum (N H K), ab ipsis factum, minus est, quàm triangulum (CMH) quod abscindit applicata ad centrum sectionis, triangulo simili (CBL), abscisso ab ea (C B) quæ ex centro. Fig. 67.

a 31. *hujus.* b *hyp.* c *cor.* 29. *hujus.* d 15. 1. e 4. 1. f 27. 1. g 30. 1. h 43. *hujus.*

Productâ F C, ut occurrat sectioni B in E, per E ducatur tangens E D, & ordinatim applicetur E X. Estque O C × C G [a] = (A C q [b] = B Cq [a] =) X C × C D. ergo cùm sit O C [c] = X C, erit C G = C D. item F C [c] = E G. & verticales anguli ad C [d] pares sunt: [e] ergo ang. C G F = ang. C D E. [f] unde D E ad F G, & [g] proinde ad N K parallela est. [h] ergo triang. C M H—C B L = triang. N H K.

Coroll. C D = C G.

Coroll. Tangens E D tangenti F G æqualis & parallela est: & conversim; si E D tangenti F D æqualis vel parallelâ sit, etiam E D tanget oppositam sectionem.

Prop. XLV.

Fig. 68. 69. 70. 71.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (C M L) cum secunda diametro (H D) conveniat (in L); & à tactu (C) ad eandem diametrum applicetur linea (C D), æquidistans alteri diametro (A H); & per tactum (C) & centrum (H) ducta linea (C H) producatur; sumpto autem in sectione quovis puncto (B), ad secundam diametrum (H D) ducantur duæ lineæ (B E, B F), quarum una (B E) contingenti (C L), altera (B F) applicatæ (C D) æquidistet; triangulum (B F E) quod ab ipsis constituitur, in hyperbola quidem majus est, quàm triangulum (G F H) abscissum ab applicata ad centrum, triangulo (L C H), cujus basis est linea contingens (C L), & vertex sectionis centrum (H): in ellipsi verò & circuli circumferentia, unà cum triangulo abscisso (G F H) æquale est triangulo (L C H), cujus basis est linea contingens (C L) & vertex sectionis centrum (H).

a 39. *hujus.* b 4. 6. c *cor.* 41. *hujus.* d 34. 1. & 1. *ax.* e 3. *ax.* f 7. 1. g 4. 1. h *priùs.* l 4. 6. m 2. *ax.* 1.

Ducantur C K, B N ad D H parallelæ. & trigonum ad A H, (simile trigono (C D L) appelletur P. estque C K. K H [a] = (M K. K C + R. T [b] =) C D. D L. + R. T. quare in hyperb. triang. C D L (C D H + C L H) [c] = (triang. C K H + P [d] =) triang. C D H + P. [e] unde P = triang. C L H. Cæterum ob B N. F G [f] = (F H. F G. [g] = D H. D C [f] = C K. K H [h] = C D. D L + R. T [l] =) B F. (N H) F E + R. T. [c] Erit triang. B F E = triang. G H F + P; [m] ergo triang. B F E = triang. G H F + triang. C L H.

Simili discursu, in ellipsi erit triang. B F E + G H F = triang. C L H.

Prop. XLVI.

Si parabolen contingens recta linea (C A) cum diametro (A B) conveniat (in A); quæ per tactum (C) ducitur diametro æquidistans (H C M) ad easdem partes sectioni lineas (L F) in sectione ductas, quæ æquidistant contingenti (C A), bifariam secabit (in N.) Fig. 72.

Ordinatim applicentur B H, F G K, L M D. Estque triang. E L D [a] = *pgr*. B·M. & triang. E F G [a] = *pgr*. B K. [b] ergo 4 lat. F L D G = *pgr*. G M. auferatur commune N M D G F; [b] manentque trigona N M L, F K N æqualia. [c] eadémque similia sunt. ergo homologa latera N L, N F æquantur. *Q. E. D.*

a 42. *hujus*.
b 3. *ax*. 1.
c 29. 1. & 4. 6.

Coroll. 1.

In parabola omnes lineæ parallelæ diametro sunt * etiam diametri: & vicissim, omnes diametri sunt parallelæ. * *def*. 10. *hujus*.

Coroll. 2.

Omnes contingenti æquidistantes sunt ordinatim applicatæ ad diametrum per tactum ductam.

Prop. XLVII.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) cum diametro (A B) conveniat (in D); per tactum (E) & centrum (C) ducta linea (E C) ad easdem partes sectioni, quæ in sectione ducuntur contingenti (E D) æquidistantes (G N) bifariam secabit (in O.) Fig. 73. 74.

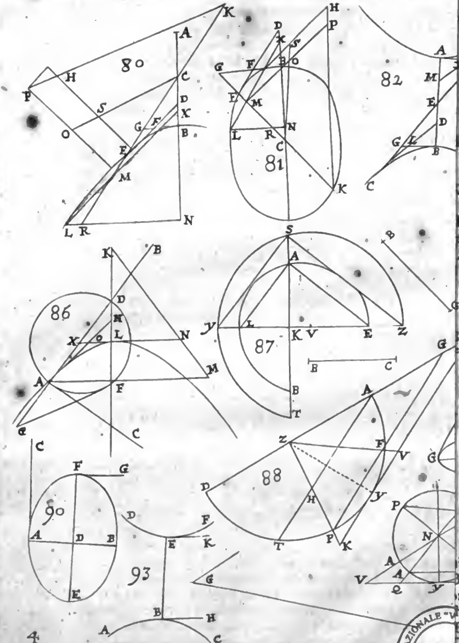
Ordinatim applicentur N F X, B L, G M K. Estque triang. HNF [a] = 4 lat. L B F X. & triang. G H K [a] = quadrilat. L B K M. [b] ergo 4 lat. N G K F = M K F X. commune auferatur O N F K M, [b] manent trigona O M G, O X N æqualia. [c] eadem vero similia sunt. ergo N O = G O. *Q. E. D.*

a *cor*. 43. *hujus*.
b 3. *ax*. 1.
c 29. 1. & 4. 6.

Coroll. C E est diameter sectionis cujuslibet ex his.

Prop. XLVIII.

Si unam oppositarum sectionum contingens recta linea (L K) cum diametro (A B) conveniat (in K); & per tactum (L), & centrum (C) linea (L C) producta alteram sectionem secet (in E); quæ, in altera sectione Fig. 75.



neâ
ad
LN
&
L.
LN
gr.
R.
=
ad
X.
::)
=
C)
idi-
F)
rtio
an-
BF)
C;)
quæ

4

quæ (K L) à sectione ducta fuerit contingenti (D C) æquidistans, ad lineam (F N), quæ per tactum ducitur diametro æquidistans, poterit rectangulum contentum inventâ lineâ (G), & eâ (L D), quæ inter ipsum (K L), & tactum (D) interjicitur. DE. DF :: G. 2 DE BX.

Ordinatim applicentur D X & K N M. Estque C B [a] $=$ (BX [b] $=$ F D); [c] unde triang E B C $=$ E F D. additóque communi DEBMN, erit D C M N [d] $=$ (*pgr.* F M [e] $=$) triang. K P M. ablatóque communi L P M N, erit *pgr.* L C [f] $=$ triang. N L K. [g] unde KL $\times$ L N $=$ 2 D C $\times$ L D.
a 35. *hujus.*
b 34. 1.
c *ex.* 20.6.
d 2. *ax.*
e 42. *hujus.*
f 3. *ax.*

Itaq; G $\times$ L D. K L $\times$ L N [h] :: (G $\times$ L D. 2 D C $\times$ L D [k] :: G. 2 D C [l] :: E D. D F [m] :: K L L N [n] ::) K Lq. K L $\times$ L N. [o] ergo G $\times$ L D $=$ K Lq.
g *lemma præc.*
h 7. 5.
k 1. 6.
l *hyp.*

Cor. Hinc D L est diameter, & G rectum latus sectionis, cujus vertex D. $\dfrac{4\,D\,Eq}{B\,X} = \dfrac{2\,D\,E \times D\,C}{B\,X}$ est rectum latus sectionis, cujus vertex B.
m 4. 6.
n 1. 6.
o 9. 5.

Prop. L.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) cum diametro (A B) conveniat, pérque tactum (E) & centrum (C) linea (E C) producatur; à vertice autem (B) ordinatim applicata (B G) conveniat cum ea (E C), quæ ducitur per tactum, & centrum; fiátque ut contingentis portio (E F) inter tactum (E) & applicatam B G ad portionem (E G) lineæ (E C) ductæ per tactum & centrum; quæ itidem inter tactum (E) & applicatam (BG) interjicitur, ita quædam recta linea (E H) ad duplam contingentis (E D); quæ (L M) à sectione ducitur contingenti (E D) æquidistans ad lineam (E C) per tactum, & centrum ductam, poterit spatium rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (B H), latitudinem habens interjectam (E M) inter ipsam (L M) & tactum (E); in hyperbola quidem excedens figurâ simili contentæ lineâ (E K) dupla ejus (C E), quæ est inter centrum & tactum, & inventâ lineâ (E H), in ellipsi verò, & circulo deficiens eâdem.
Fig. 80. 81.
EF. EG :: EH. 2 ED.

Ducatur L R N ad B G, & C S O ad K P parallelæ. Et ob E K [a] $=$ 2 E C, [b] erit E H $=$ 2 E S. ergo 2 E S. 2 E D [c] :: (E H. 2 ED [d] :: F E. E G [b] ::) L M. M R. porro ob triang. R N C [e] $=$ C D E [f] (C G B) $+$ L N X (in hyperbola), [e] vel triang. R N C $+$ L N X $=$ C D E (in ellipsi & circulo) erit trapezium M E D X [g] $=$ triang. L M R.
a *hyp.*
b 4. 6.
c 7. 5.
d *hyp.*
e 43. *hujus.*
f *sch.* 43 *hujus.*
g 3. *ax.* 1.

h *lem. ante* 49. k 4. 6. l 1. 6. m *prius et* 7. 1. n 15. 5. o *prius.* p 9. 5. q *prius.* r 34. 1.

L M R. [h] ergo L M × M R = E M × : E D + M X. Denique quia M O. E S [k] :: (M C. C E [k] ::) M X. E D. componendóque M O + E S. E S :: M X + E D. E D. erit permutando M O + E S. M X + E D ([l] hoc est E M × : M O + E S. E M × : M X + E D [m] vel E M × : M O + E S. L M × M R) :: E S. E D [n] :: 2 E S. 2 E D [o] :: L M. M R. [p] :: L Mq. L M × M R. [p] ergo E M × : M O + E S = L Mq. atqui E S q = (S H [r] =) O P. ergo E M × M P = L M q. *Q. E. D.*

Cor. E K est diameter, & E H latus rectum sectionis, cujus vertex E.

Prop. L I.

Fig. 82.

Si quamlibet oppositarum sectionum contingens recta linea (C D) cum diametro (A B) conveniat; perque tactum (C) & centrum (E) linea (C E) producatur usque ad alteram sectionem; à vertice verò (B) ducatur linea (B G) æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, conveniénsque cum linea (C E) per tactum & centrum ducta; & fiat ut contingentis portio (L C) inter applicatam & tactum ad portionem (C G) lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta linea (K) ad duplam contingentis (C D), quæ in altera sectione ducitur, æquidistans contingenti (F M) ad lineam (F E) per tactum, & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (K) latitudinem habens lineam, quæ est inter ipsam, & tactum (F), excedénsq; figurâ simili ei, quæ lineâ (CF) inter oppositas sectiones interjectâ, & inventâ (K) continetur.

a *cor.* 44. *hujus.* b *constr.* c 4. 6. d *hypoth.* e 7. 5. f 50. *hujus.*

Ordinatim applicetur A X N. [a] Súntque F M, C D æquales & parallelæ: [b] itémque A N, B G parallelæ sunt. ergo F X. F N [c] :: (L C. C G :: [d] K. 2 C D [e] ::) K. 2 F M; unde quæcunque à sectione A F ad productam E F contingenti F M ducuntur parallelæ, [f] poterunt rectangulum contentum ipsâ K, & interjecta inter istas; & punctum F, excedéntque figurâ simili ei, quæ rectâ C F, & ipsâ K continetur.

Coroll.

a 46. *hujus.* b 47. c 48.

Itaque his demonstratis, liquet in [a] parabola unamquamque rectarum linearum, quæ diametro ex generatione ducuntur æquidistantes, diametrum esse; In [b] hyperbola verò & ellipsi & [c] oppositis sectionibus, unamquamque earum, quæ per centrum ducuntur.

d 49. e 50.

Et in [d] parabola quidem applicatas ad unamquamque diametrum, æquidistantes contingentibus posse rectangula ipsi adjacentia: in [e] Hyperbola,

perbola, & [f] oppositis rectangula adjacentia ipsi, quæ excedunt eâdem f *51. hujus.*
figurâ, in ellipsi autem, quæ eâdem deficiunt. Postremò quæcunque
circa sectiones, adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, &
aliis diametris assumptis eadem contingere.

Prop. LII. Probl. 1.

Datâ in plano rectâ lineâ (A B) ad unum punctum (A) terminatâ, Fig. 83.
invenire in plano coni sectionem, quæ Parabole appellatur, ita ut ejus
diameter sit data linea (A B), vertex lineæ terminus (A); quæ verò
à sectione ad diametrum (A B) in dato angulo applicatur, possit re-
ctangulum contentum lineâ, quæ est inter ipsam & sectionis verticem
(A), & alterâ quâdam datâ lineâ (Z).

Datus angulus primò rectus sit. Producatur A B ad E, ita ut A E 1. *Cas.*
$\sqsubset$ $\frac{1}{4}$ Z. Sitque Z. Y [a] :: Y. A E. unde Z. A E [b] :: Yq. A Eq. ergo a 13. 6.
cum Z [c] $\sqsupset$ 4 A E, [d] erit Yq $\sqsupset$ 4 A Eq, & proinde Y [*] $\sqsupset$ 2 A E. b *cor.* 20. 6.
[e] ergo ex Y, & duabus AE constitui poterit triangulum. Fiat ergo EAF, c *constr.*
rectum subjecto plano, ita ut AF = AE, & E F = Y; ducantúrque d 14. 5.
A K ad E F, & F K ad E A parallelæ ([f] unde A K [f] = E F = [g] = Y; * 4. 2.
& F K [f] = E A [g] = F A). Tum concipiatur conus, cui vertex F, e 22. 1.
basis circulus super diametrum A K, rectus plano A F K; erit is co- f 34. 1.
nus rectus (ob F K = F A). Secetur conus plano ad circulum A K g *constr.*
parallelo, [h] facientíque proinde sectionem M X N circulum, plano h 4. *hujus.*
M F N (vel F A K) rectum, horúmque communis sectio sit recta
M N, [h] diameter nempe circuli M X N; communis autem sectio sub-
jecti plani, & circuli sit recta X L. Quum igitur tam circulus M X N,
quàm subjectum planum recta sint triangulo M F N, [k] erit istorum k 19. 11.
communis sectio X L recta trigono M F N, [l] ideóque rectis (quæ in l 3. *def.* 11.
eo) M N, A B perpendicularis. Ex quibus constat planum per A B,
X L ductum facere in cono sectionem, quæ parabole dicitur (juxta
conditiones in 11ª hujus præscriptas) cujus diameter A B, lineæque
ad hanc à sectione ordinatim ductæ ad rectos angulos applicentur, ut- m *priùs.*
pote ad X L parallelæ. Porro ob Z, Y; A E [m] (hoc est Z, A K, A F) n *constr.*
[n] $\div\div$, [o] erit Z. A F :: A Kq. A Fq (A F $\times$ F K). [p] unde Z est rectum o *cor.* 20. 6.
latus. Ergo factum. p 11. *hujus.*

Sed datus angulus non sit rectus, sitque ei æqualis H A E; & fiat 2. *Cas.*
A H = $\frac{1}{2}$ Z; & per H ducatur H E ad A E perpendicularis, & per Fig. 84.
E ad H B parallela E L, & per A ad E L perpendicularis A L: tum
bisectâ E L in K, per K ducatur ipsi E L perpendicularis M K F G;

a 11.6. sitque A Lq [a] = L K × K M. Datis igitur rectâ K L positione, & rectâ K M magnitudine, & recto angulo, describatur (ut modò ostensum)
b 11. hujus. parabole, cujus diameter K L, vertex K, & rectum latus K M. Transi-
c 33. hujus. bit hæc per A ([b] ob A Lq = K L × K M) & A E [c] continget ipsam,
d cor. 46. huj. (ob L K = K E) & H A est diameter [d] (quia ad E L parallela), [e] &
e 45. hujus.
f constr. quæ ad A E parallelæ, bisecantur ab A B, [f] inque angulo H A E appli-
g 4. 6. cantur: & ob trigona A G F, A E H [g] similia (quia anguli A E H,
h 15. 5. A G F recti, & H A E communis), est F A. A G [g] :: (H A. A E [h] ::)
k constr. 2 H A. 2 A E, [k] hoc est F A. A G :: Z. 2 A E. [l] unde Z rectum erit la-
l 49. hujus. tus sectionis. Quæ *E. F.*

Prop. LIII. Probl. 2.

Fig. 85. Datis duabus rectis lineis (A B, B C) terminatis, quæ ad rectos in-
* hoc est versùs D. ter se angulos constituantur; & alterâ (A B) productâ ad * easdem partes angulo recto, invenire coni sectionem, quæ hyperbole dicitur; in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ (A B, B C), ita ut producta (A B) sit diameter sectionis, & vertex punctum (B), quod ad angulum (A B C) consistit; quæ verò à sectione ad diametrum ordinatim applicatur, angulum faciens, æqualem dato, possit rectangulum, quod adjacet alteri lineæ (B C), latitudinem habens lineam interjectam inter applicatam, & sectionis verticem (B), excedénsque figurâ simili, & similiter positâ ei, quæ datis à principio lineis (A B, B C) continetur.

1. Cas. Sit datus angulus primò rectus; & super lineam A B planum attollatur, rectum subjecto plano, in quo circa A B describatur circulus,
* vid. not. 1. * ita ut ductâ diametro E K L ad A B perpendiculari, non sit ratio E K ad K L major eâ, quam habet A B ad B C. Fiat igitur E K. K M
a 12. 6. [a] :: A B. B C. & per M ducatur M F ad A B parallela; junctísque
b 29. 1. A F, E F, B F, per B ducatur B X ad E F parallela. Itaque ob ang.
c 27. 3. A X B [b] = (A F E [c] = E F B [b] =) F B X, [d] erit F B = F X. Con-
d 6. 1. cipiatur jam conus, cujus vertex F, basis circulus super diametrum B X, rectus trigono F B X Erit is conus rectus (ob F B = F X). Producantur F B, F X, M F, & secetur conus plano, ad circulum B X paral-
e 4. hujus. lelo, [e] facienti proinde circulum G P H R rectum plano F X B, cujúsq; diameter G H communis sit istorum planorum sectio. Sit verò P D R communis sectio circuli G R H, & subjecti plani. Et quoniam tam circulus G R H, quàm subjectum planum recta sunt trigono FGH,
f 19. 11. [f] erit horum communis sectio P D R eidem trigono F G H recta;
g 3. def. 11. [g] ideóque rectis, quæ in eo, G H, D B perpendicularis. Ex quibus liquet

liquet coni ſectionem P B R (juxta conditiones in 12[ma] hujus præſti- h *conſtr.*
tutas) eſſe hyperbolen, cujus vertex B, & ordinatæ ad diametrum A B k 2. 6.
in angulo recto applicentur, quippe omnes ad ipſam P R parallelæ. l 1. 6.
Porro ob A B. B C[h] :: (E K. K M[k] :: N E. N F[l] :: N E × N F m 35. 3.
[m](N A × N B). N Fq[n] = N A. N F[o](O F. F G) + N B. N F n 23. 6.
([o]O F. F H)[n] =) O Fq. O G × G H[p] :: A B. B C. q erit A B tranſ- o 4. 6.
verſum latus, & B C rectum. p 11. 5.
q 12. *hujus.*

Sin datus angulus non ſit rectus. Datæ ſint rectæ A B, A C, & 2. *Caſ.*
angulus B A H per dato. Biſecetur A B in D, & deſcripto ſuper AD Fig. 86.
ſemicirculo, occurrat G F ad A H parallela, * faciens G Fq. D G × *vid. not. 2.
G A :: A C. 2 A D; junctaq; F D, [a]fiat F D. D L :: D L. D H; & ſum- a 13. 6.
ptâ D K = D L, [b] fiat L F. A F :: A F. F M; & connectatur K M, b 11. 6.
& per L ducatur N L X ad K F perpendicularis. Deſcribatur tunc c 12. *hujus.*
Hyperbole (juxta modò oſtenſa), cujus vertex L, tranſverſus axis K L, d *conſtr.* & 17.
rectum latus L N; [c] tranſibit hæc per A [d] (ob L F × F M = A Fq.) e 37. *hujus.* (6.
& A H ſectionem [e] continget (ob F D × D H = D Lq) [f] & proin- f *cor.* 47. *hujus.*
de A B eſt diameter ſectionis. Porro, quum ſit A C. 2 A H + F G. g 4. 6.
G D[g] = (A C. 2 A H. + A H. A D[h] = A C. 2 A H + 2 A H. h 15. 5.
2 A D[k] = A C. 2 A D[l] = F Gq. G A × G D[m] =) F G. G A + k 5. *def.* 6.
F G. G D. Erit A C. 2 A H :: (F G. G A[n] ::) O A. A X. [o] unde l *conſtr.*
A C eſt rectum latus. Ergo factum. m 23. 6.
n 4. 6.
o 50. *hujus.*

Notæ.

1. Deſcribitur circulus circa A B, ita ut E K. K L :: A B. B C, Fig. 87.
hoc pacto.

Fiat utcunque Z K. K Y[a] :: A B. B C. & biſectâ Z Y in V, centro a 12. 6.
V, per Z, & Y deſcribatur circulus, ſecans ipſam A B (ſi opus eſt,
productam) in S, & T; connexiſque S Y, S Z, per A ducantur ad b 29. 1. *et* 1. *ax.*
has parallelæ A L, A E. ergo quum angulus Y S Z rectus ſit, [b] erit c *conv.* 31. 3.
quoque angulus L A E rectus. [c] ergo ſuper diametrum L E deſcrip- d *cor.* 1. 3.
tus circulus tranſibit per A, [d] ideóque per B, [e] quia K B = K A. eſtq; e *hyp.*
E K. Z K[f] :: (A K. S K[f] ::) L K. Y K. & permutando E K. L K :: f 4. 6.
(Z K. Y K[g] ::) A B. B C. g *conſtr.*

2. Quomodo autem ducatur G F ad A H parallela, faciens GFq ad Fig. 88.
D G × G A in data ratione (puta R ad S), ita conſtabit. Sumpto Z
centro circuli, ducatur Z Y ad A H T perpendicularis, & ab occurſu
Y, ducatur Y Q ad A H parallela, [a] quare Y Q tangit circulum. Fiat a *cor.* 16. 3.
vèro Q V. V Y[b] :: S. $\frac{R-S}{2}$ & productâ Q Y, ſumatur Y K = Y V; b 12. 6.

 con-

connectantúrque Z K, Z V circulum secantes in P, & F; conjunctaq; P F protrahatur ad G. dico factum.

c 4. 1. d 2. 6. e 30. 1. f constr. Nam ob V Y = K Y, & angulos ad Y rectos, [c] erit Z V = Z K. item Z F = Z P, [d] ergo F P ad V K, [e] hoc est ad A H, est parallela. Et quoniam S. $\frac{R-S}{2}$ [f] :: Q V.V Y, erit duplando consequentes, S. R—S

* :: QV. V K. & invertendo R—S. S :: V K. QV. & componendo R. S

g 1. 6. h 36. 3. & 7. 5 :: (QK . Q V *:: G P. G F [g] :: G P × G F . G Fq [h] ::) D G × G A. G Fq. ac inversè S. R :: G F q. D G × G A. *Q. E. F.*

Prop. LIV. Probl. 3.

Fig. 89. Datis duabus rectis terminatis (A B, A C), atque ad rectos inter se angulos, invenire circa diametrum ipsarum alteram (A B) coni sectionem, quæ Ellipsis appellatur, in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ (A B, A C), ita ut vertex sit punctum (A) ad rectum angulum (B A C); & à sectione ad diametrum (A B) applicatæ in angulo dato possint rectangula adjacentia alteri lineæ (A C), quæ latitudinem habeant lineam inter ipsas, & verticem (A) sectionis interjectam, deficiántque figurâ simili, & similiter positâ ei, quæ datis rectis lineis (A B, A C) continetur.

1. *Cas.* Sit datus angulus primò rectus, & ex A B planum attollatur, rectum subjecto plano, in quo circa A B descriptum sit circuli segmentum A D B; & bisecetur arcus A D B in D, unde connectantur D A, D B; & fiat A X = A C; & per X ducatur X O ad B D parallela, & per O ipsa O F ad A B parallela, & juncta D F occurrat protractæ B A in E. Jungantur F A, F B, & producantur, pérque punctum G (utcunque sumptum in F A) productâ) ducatur ipsi E D parallela G H, productæ A B occurrens in K, productæque F O in L. Estque ideò

a 29. 1. b 32. 1. c 26. 3. d 21. 3. e 19. ax. 1. f 1. ax. g 6. 1. h 19. 11. k 3. def. 11. ang. H G F [a] = (ang. E F A [b] = F A D [c] (F B D) + F D A [d] (F B A) = F B D + F B A [e] = A B D [c] = D F B [a] =) G H F [f] = H G F. [g] unde F G = F H. Itaque super G H describatur circulus G H N rectus trigono H F G, sitque basis coni recti, habentis verticem F. Et quia tam circulus G H N, quàm subjectum planum recta sunt plano H F G, [h] erit ipsorum communis sectio (K M) plano eidem, [k] rectisque idcirco G K, A K perpendicularis.

l 13. hujus. m 23. 6. Liquet igitur planum per A K M [l] facere in cono ellipsin, cui diameter A B, ad quam ordinatæ omnes perpendiculariter applicentur, quippe ipsi K M parallelæ: porro, ob F Lq . G L × L H [m] = (F L. G L

G L [n] (AK. K G, [n] vel A E. E F) ╪ F L. L H ([n] B K. K H, [n] vel B E. E F) = A E. E F ╪ B E. E F [m] = A E × B E. E Fq [o] = D E × E F. E Fq [p] = D E. E Fq = D A. A O :: q B A. A X [r] ::) B A. A C [s] :: F Lq. G L × L H. erit A C rectum latus. n 4. 6. o 36. 3. & 7. 5. p 1. 6. q 4. 6. r constr. et 7. 5. s 11. 5.

Sin diameter A B minor ponatur dato recto latere A C; bisectâ A B in D, ducatur F E bisecta quoque in D, ita ut sit A C. F E [a] :: F E. A B. & ductâ F G ad A B parallela, sit F E. F G [b] :: A C. A B ([c] hoc est) :: F Eq. A Bq :: F Dq. [d] (F D × D E). A Dq [e] :: F E. F G. Ducatur itaque (ut modò ostensum) ellipsis, cujus axis E F (& rectum latus F G; transibit hæc per A. (ob F D × D E. A Dq [f] :: F E. F G) [g] ideóque per B ([d] ob A D = D B). item propter A C. C B :: F Dq. A D × D B (A Dq). [f] erit A C rectum latus. 2. *Cas.* Fig. 90. a 13. 6. b 12. 6. c cor. 20. 6. d constr. e 11. 5. f 21. *hujus.* g 30. *hujus.*

Sed datus angulus non sit rectus; sitque ei æqualis angulus B A D; bisectâque A B in E, circa A E describatur semicirculus, in quo ad A D *ducatur parallela F G, faciens F Gq. A G × G E :: C A. AB; [a] & junctæ A F, E F producantur; [a] & sit D E. E H :: E H. E F & sumptâ E K = E H, factóque H F. F A [b] :: F A. F L, conjungatur K L, occurrens ductæ N M (per H ad A L) parallelæ. Tum (ex modò præostensis) describatur ellipsis, cujus axis transversus sit K H, & rectum latus H M. [c] transibit hæc utique per A [d] (ob H F × F L = F Aq); & [e] idcirco per B (ob A E [c] = E B) ac ipsam [f] continget D A [g] (ob D E × E F = E Hq). Item propter C A. 2 D A. ╪ F G. G E [h] = (C A. 2 D A ╪ D A. A E [k] = C A. 2 D A ╪ 2 D A. A B [l] = C A. A B [m] = F Gq. A G × G E [n] =) F G. A G ╪ F G. G E. erit C A. 2 D A*:: (F G. A G [p] ::) X A. A N. [q] ergo A C est rectum latus. 3. *Cas.* Fig. 91. * vid. Not. a 13. 6. b 11. 6. c 13. *hujus.* d constr. e 30. *hujus.* f conv. 38 *huj.* g constr. & 17. (6. h 4. 6. k 15. 5. l 5. def. 6. m constr. n 23. 6. * p 4. 6. q 50. *hujus.*

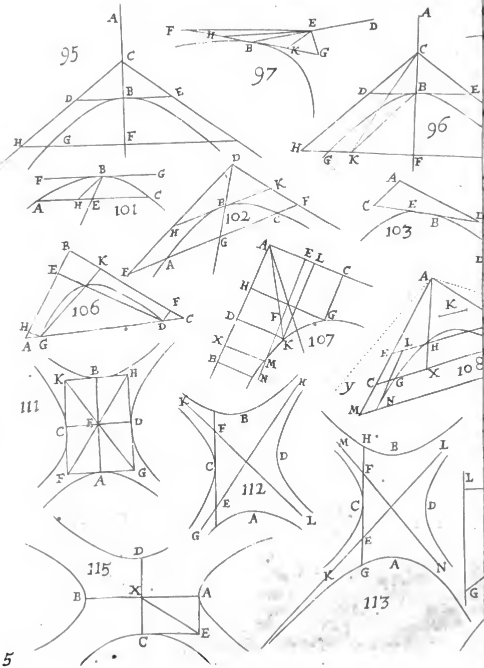
Notæ.

Quomodo verò duci poterit G F ad A D parallela, ita ut sit G Fq ad A G × G E in data ratione S ad R, ita constabit. Fig. 92.

Sumpto Z centro circuli, ducatur ad A D perpendicularis Z Y, circulo occurrens in Y. & per Y ducatur Q Y ad A D parallela; [a] & proinde tangens circulum in Y, occurrénsque productæ Z A in Q. a cor. 16. 3.

[b] Fiat autem $\frac{R-S}{2}$ S :: Y Q. Q V. productâque V Y sumatur Y K = Y V; & junctæ Y Z, K Z producantur, adeò ut completo circulo occurrant punctis F, P, & connectatur F P, secans A E in G. Dico factum. b 12. 6.

Nam



5

oc est
endo
K V.
G F.
G E.
inter
(EB)
vero
exce-
r.
B E,
ppli-
B H,
E B,
i de-
fore
recta
(in
ectæ
posi-
ban-
ame-
dato
AC.
catur
iones
D R
icen-
d : :
D L-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. II.

Prop. I.

SI hyperbolen contingat recta linea (D E) ad verticem (B); & ab ipso ex utraque parte sumatur (B D, B E) æqualis ei, quæ potest quartam figuræ partem, lineæ (C D, C E) quæ è sectionis centro (C) ad sumptos contingentis terminos (D, E) ducuntur, cum sectione non convenient. Fig. 95.

Sumpto utcunque in C D puncto H, ordinatim applicetur H G F. Estque A F × F B. F Gq [a] :: (T. R [b] :: Tq. T R [c] :: $\frac{Tq}{4}$. $\frac{TR}{4}$ [d] :: C Bq. B Dq [e] ::) C Fq. F Hq. ergo cùm A F × F B. [f] $\sqsupset$ C Fq. [g] erit F Gq $\sqsupset$ F Hq. ergo punctum H est extra sectionem. Idémque de reliquis rectæ C D punctis ostendetur. ergo tota C H est extra sectionem. *Q. E. D.*

a 21.1. *hujus.*
b 1.6.
c 15.5.
d *hyp.*
e 4.6. *et* 22.6.
f 6.2.
g 14.5.

Coroll. C Bq. B Dq :: T. R :: A F × F B. F Gq.

Prop. II.

Iisdem manentibus, ostendendum est, non esse alteram asymptoton C K, quæ angulum D C E dividat. Fig. 96.

Per B ducatur BK ad C D parallela, occurrens ipsi C K in K; & per K ducatur H G K F L ad D E parallela. Estque H K [a] = D B, [b] & K L $\sqsubset$ B E. [c] unde H K × K L $\sqsubset$ D B × B E vel B Dq. atqui ob C Bq. B Dq ([d] A F × F B. G Fq) [e] :: (C Fq. F Hq [f] ::) C Fq — A F × F B.

a 34.1.
b 5. *ax.* 1.
c *sch.* 48. 1.
d *cor.* 1. *hujus.*
e 4.6. *et cor.* 22 (6.
f 19.5.

g 65. & 3. ax. × FB. FHq — GFq [g] (hoc est CBq. HG × GL.), [h] est BDq =
h 9 5. [i] HG × GL. ergo HK × KL ⊏ HG × GL. [k] unde punctum K est
k sch. 5. 2. intra sectionem. & proinde CK sectionem intrat. *Q. E. D.*

Coroll. HG × GL = DBq = $\frac{1}{4}$ TR.

Prop. III

Fig. 97. Si hyperbolen contingat recta linea (HK), cum utraque asymptoton (EF, EG) conveniet; & ad tactum (B) bifariam secabitur; quadratum vero utriusque ejus portionis (BF, BG) æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum (BD) per tactum ducitur.

Ducatur diameter BED, & quartæ parti figuræ ad hanc æquentur
a 1. hujus. singula BHq, BKq. erunt ductæ EH, EK asymptoti. [a] ergo hæ non differunt ab ipsis EF, EG.

Prop. IV. Probl. 1.

Fig. 98. Datis duabus rectis lineis (AB, AC) angulum (BAC) continentibus, & dato intra angulum (BAC) puncto (D), describere per punctum (D) coni sectionem (quæ hyperbole dicitur, ita ut datæ lineæ (AB, AC) ipsius asymptoti sint.

a 31.1. b 4.6. [a] Duc DF ad AB parallelam, & fac FC = FA, & produc CDB.
c constr. Estque BC. CD [b] :: (CA. CF [c] :: 2. 1). ergo BCq [d] = 4CDq
d cor. 4. 2. = 4BDq. duc DAE, ita ut AE = DA. & fiat ED × G [e] =
e 11.6 et 17.6. BCq [f] = 4BDq. [g] Habes igitur diametrum ED, & rectum latus G
f priùs. hyperbolæ, cujus vertex D, [h] asymptoti AB, AC. ergo factum.
g 53. hujus.
h 1. hujus.

Prop. V.

Fig. 99. Si parabolæ, vel hyperbolæ diameter (DBE) lineam quandam (AC) bifariam secet (in E), quæ (FG) ad diametri terminum (B) contingit sectionem, æquidistans est lineæ (AC) bifariam sectæ.

a 46. & 47. 1. hujus. Si negas AC esse parallelam ipsi FG, sit ei parallela CH. [a] ergo
b hyp. CK = KH. unde cùm sit quoque CE [b] = EA, [c] erunt AH, EK
c 2. 6. parallelæ, contra 22. 1. hujus.

Prop.

Prop. VI.

Si ellipsis, vel circuli circumferentiæ diameter (A B) lineam quandam (C D) non per centrum transeuntem bifariam secet (in E), quæ ad diametri terminum (A) contingit sectionem, æquidistans erit bisectæ lineæ (C D). Fig. 100.

Demonstratur, ut præcedens.

Prop. VII.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingat recta linea (F G); & huic æquidistans (A C) ducatur in sectione; & bifariam dividatur (in E); quæ à tactu (B) ad punctum (E) lineam bifariam dividens jungitur (B E), sectionis diameter erit. Fig. 101.

Nam altera [a] nulla B H bisecabit A C; ergo non erit alia [b] diameter quàm B H.

a 9. ax. 1.
b 46. & 47. 1. hujus.

Prop. VIII.

Si hyperbolæ occurrat recta linea (A C) in duobus punctis (A, C); producta ex utraque parte conveniet cum asymptotis (D E, D F); & lineæ (A E, C F), quæ ex ipsa abscissæ inter sectionem & asymptotos interjiciuntur, æquales erunt. Fig. 102.

Bisecetur A C in G, ducatúrque D G. [a] hæc diameter est. [b] ergo tangens per B (nempe H K) est ad A C parallela; ergo cùm H K *asymptotis occurrat, [c] sitque B H = B K, * etiam A C eisdem occurret, [d] eritque G E = G F; [e] unde manent A E, C F æquales. *Q. E. D.*

a 7. hujus.
b 5. hujus.
c 3. hujus.
d 4. 6.
e 3. ax.

Prop. IX.

Si recta linea (C D) occurrens asymptotis (A C, A D) ab hyperbolæ bifariam secetur, (in B) in uno tantum puncto sectionem contingit. Fig. 103.

Occurrat alibi, si fieri potest, in E. ergo E C [a] = (B D [b] = $\frac{1}{2}$ D C [b] =) B C. [c] *Q. E. A.*

a 8. hujus.
b hyp.
c 9. ax. 1.

Prop. X.

Si recta linea (D F) sectionem secans (in A, C) conveniat cum utraque asymptoton (E D, E F), rectangulum contentum rectis lineis Fig. 104.

G (D A,

(D A, A F) quæ inter asymptotos, & sectionem interjiciuntur, æquale est quartæ parti figuræ factæ ad diametrum (H G), quam æquidistantes ipsi ductæ lineæ (A C) bifariam dividit.

Patet ex corollario 2dæ hujus.

a 1. ax. 1.

Cor. $AD \times AF$ [a] $= CD \times CF$.

Prop. XI.

Fig. 105.

Si utramque linearum (A E, A C) continentium angulum (E A C), qui deinceps est angulo (D A C) hyperbolen continenti, secet recta linea (E F), in uno tantùm puncto cum sectione conveniet; & rectangulum constans ex iis (E G, F G), quæ interjiciuntur inter lineas (A E, A C) angulum continentes, & sectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro (A B), quæ secanti lineæ (E F) æquidistans ducitur.

a cor. 47. 1. hujus.
b 26. 1. hujus.
c 5. hujus.
d 3. hujus.
e 23. 6.
f 4. 6.
g 10. hujus.
h 14. 5.

Ducatur A L ad E F parallela. [a] hæc diameter est sectionis. [b] ergo E F in unico puncto (G) occurrit sectioni. Per G ordinatim applicetur H G L K; [c] hæc tangenti C D (per verticem B ductæ) est parallela. C Bq [d] (C B × B D). B Aq [e] = (C B. B A [f] (H G. G F) + B D. B A [f] (G K. G E) [e] =) H G × G K. G F × G E. ergo cùm C Bq [g] = H G × K G, [h] erit B Aq = E G × G F. *Q. E. D.*

Prop. XII.

Fig. 106.

Si ab aliquo puncto (D) eorum, quæ sunt in sectione, ad asymptotos (B A, B C) duæ rectæ lineæ (D E, D F) in quibuslibet angulis ducantur; & ab altero puncto (G) in sectione sumpto ducantur aliæ lineæ (G H, G K) his ipsis (D E, D F) æquidistantes, rectangulum constans ex æquidistantibus (G H, G K) æquale est ei, quod fit ex iis (D E, D F), quibus illæ æquidistantes ductæ fuerant.

a cor. 10. hujus.
b 14. 6.
c 4. 6.
d 11. 5.
e 16. 6.

Connexa G D protrahatur utrinque in A, & C. Estque D A × D C [a] = G A × G C: [b] unde G A. D A [c] (G H. D E) [b] :: (D C. G C [c] ::) D F. G K [d] :: G H. D E. [e] ergo G H × G K = D F × D E. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Fig. 107.

Si in loco asymptotis (A B, A C) & sectione terminato, quædam recta linea (E F) ducatur, æquidistans asymptoton alteri (A B), in uno tantùm puncto cum sectione conveniet.

Si

Si primò negas E F sectioni occurrere, per G (punctum utcunque sumptum in sectione) ducantur G C, G H ad A B, A C parallelæ. Sitque A E × E F [a] = G C × G H, connexa A F [b] sectioni occurret, puta in K. Ex quo ducantur K L, K D ipsis A B, A C itidem parallelæ. ergo K L × (A L) K D [c] = (G H × G C [d] =) A E × E F. [e] *Q.E.A.*
Proinde E F sectioni occurret, nempe in M. Dic alibi occurrere, puta in N. ducantúrque M X, N B ad A C parallelæ. ergo E M × M X [f] = (E N × N B [g] =) E N × M X. [h] *Q.E.A.*

a 11.6. et 16.6. b 2. hujus. c 12. hujus. d constr. e 9. ax. f 11. hujus. g 34. 1. & sch. h 9. ax. (48.1.

Prop. XIV.

Asymptoti (A B, A C), & sectio in infinitum productæ ad seipsas propius accedunt; & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo (K). Fig. 108.

Ducantur E H F, C G D tangenti utcunque parallelæ; pérque A, & occursum H jungatur A H X. Estque C G × G D [a] = E H × H F. [b] quare G D. H F :: E H. C G. ergo cùm G D ⊏ (X D ⊏) H F, [c] erit E H ⊏ C G; paritérque omnes decrescunt versùs partes C G. Sumatur E L ⊐ K, ducatúrque L N ad A C parallelæ, [d] hæc sectioni occurret, puta in N, per quod ducatur M N B ad E F parallela. Estque M N [e] (= E L) [f] ⊐ K, *Q.E.D.*

a 10. hujus. & 1. ax. b 14. 6. c 14. 5. d 13. hujus. e 34. 1. f constr.

Cor.

Ex hoc manifestum est lineas A B, A C ad sectionem accedere propiùs, quàm omnes aliæ asymptoti (quales A Y, A Z); & angulum B A C minorem esse quolibet angulo, qui aliis ejusmodi lineis continetur.

Prop. XV.

Oppositarum sectionum (A, B) asymptoti communes sunt. Fig. 109.

Sint A B diameter, C centrum, ac D E, F G contingant sectiones in A, B; è quibus utrinque abscindantur A D, A E, B F, B G, ut singularum quadrata æquentur quartæ parti [a] figuræ ad A B: itaque junctæ C D, C E sectionis A, & C F, C G, sectionis B [b] asymptoti erunt. quoniam verò utraque D E, F G ordinatim applicatis ad A B est parallela; & [c] proinde sibi invicem istæ parallelæ sunt, [d] erit ang. B A C = G B C; paréfque [e] sunt A C, B C; [f] & A D, B G. [g] ergo ang. A C D = ang. B C G, [h] ergo D C G est recta linea. Similiterque

a 14.1. hujus. b 1. hujus. c 30. 1. d 29. 1. e hyp. f constr. g 4. 1. h cor. 15. 1.

terque E C F recta est. Unde patet propositum.

Coroll. Tangentes D E, F G parallelæ sunt sibi invicem.

Prop. XVI.

Fig. 110. Si in oppositis sectionibus (A, B), ducatur quædam recta linea (H K), secans utramque linearum (C D, C F) continentium angulum (D C F), qui deinceps est angulo (D C E, vel G C F) sectiones continenti; cum utraque oppositarum in uno tantùm puncto conveniet, & lineæ (H L, K M), quæ ex ipsa abscissæ inter asymptotos (C D, C F), & sectiones interjiciuntur, æquales erunt.

a 11. hujus. Quod H K sectionibus occurrat, [a] manifestum est; occurrat punctis L, M; pérque centrum C ducatur A B ad L M parallela. Estque
b 29.1. hujus. $KL \times LH$ [a] $=$ (ACq [b] $= BCq$ [a] $=$) $HM \times MK$. [c] ergo KL.
c 16. 6. $MK :: HM . LH$. & componendo $LM . MK :: ML . LH$. [d] unde
d 9. 5. $MK = LH$, *Q. E. D.*

Prop. XVII.

Fig. 111. Oppositarum sectionum (A, B; C, D) quæ conjugatæ appellantur, asymptoti communes sunt.

a cor.15. hujus. Sint A B, C D conjugatæ diametri sectionum; pérque vertices A,
b def.ad 16. & B, C, D ducantur tangentes F G, K H, F K, G H; [a] Liquet, F G H K
17. 6. esse parallelogrammum, & diagonales F H, G K esse asymptotos; nam
c cor. 4. 2. figuris ad A B [b] æquatur CDq, [c] hujúsque quartæ parti singula AFq,
d 1. & 16. AGq, BHq, BKq æquantur. [d] unde F H, G H sunt asymptoti se-
hujus. ctionum A, B. pariterque hæ asymptoti sunt sectionum C, D. quare constat propositum.

Prop. XVIII.

Fig. 112. Si uni (C) oppositarum sectionum, (A, B; C, D) quæ conjugatæ dicuntur, occurrat recta linea (E F), & producta ad utrasque partes extra sectionem cadat; cum utraque (A, B) sectionum, quæ deinceps sunt, in uno tantùm puncto conveniet.

a 13. hujus. Sint G H, L K asymptoti, [a] his occurrit E F. [b] ergo liquet pro-
b 16 hujus. positum.

Prop.

Prop. XIX.

Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, Fig. 113.
ducatur recta linea (E F), ipsarum quamvis (C) contingens cum secti- * *per praced.*
onibus (A, B), quæ deinceps sunt, * conveniet (in G, H); & ad ta-
ctum (C) bifariam secabitur.

Sint K L. M N asymptoti. Et ob C E [a] = C F, & E G [b] = F H, a *3. hujus.* b *16. hujus.*
[c] erit C G = C H. *Q. E. D.* c *3. ax. 1.*

Prop. XX.

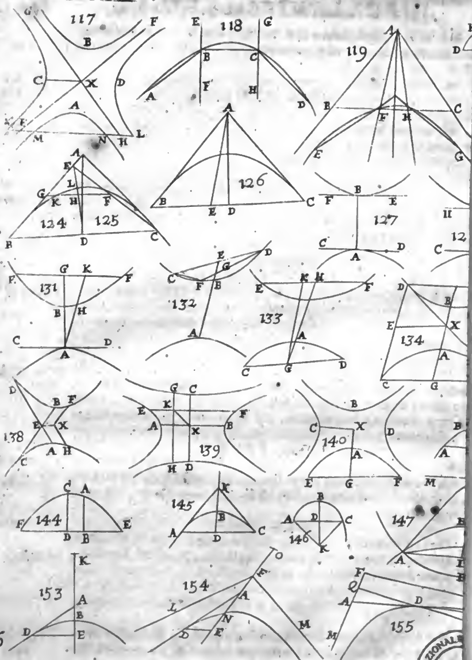
Si oppositarum sectionum (A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, Fig. 114.
unam (A) contingat recta linea (E F); & per ipsarum centrum (X)
ducantur duæ lineæ; una quidem (E X) per tactum, altera verò (X G)
contingenti (E F) æquidistans; quousque occurrat (in G) uni (C)
earum sectionum, quæ deinceps sunt; recta linea (G H) quæ in oc-
cursu (G) sectionem contingit, æquidistans erit lineæ (E X) per ta-
ctum, & centrum ductæ; quæ verò (E Z, G O) per tactus, & cen-
trum ducentur, oppositarum sectionum conjugatæ diametri erunt.

Sint A M, C N [a] recta sectionum latera, & per puncta E, G, C or- a *14. 1. hujus.*
dinatim applicentur E K, G L, C R P. Estque X K. K E. + F K. K E b *23. 6.*
[b] = (X K × F K. K Eq [c] = B A. A M [d] :: N C. C D :: [e] G Lq. L X × c *37. 1. hujus.* d *vid. Not.*
L H [b] =) G L. L X + G L. L H. atqui (ob L X ad E K, & L G ad e *4. 6.*
X K, & G X ad E F parallelas) [e] est F K. K E :: G L. L X. ergo ma- f *6. 6.*
net X K. K E :: G L. L H. [f] ergo trigona E K X, H L G similia sunt. g *29. 1.*
[f] & ang. E X K = H G L. itemque totus ang. G X K [g] = X G L: [h] er- h *3. ax. 1.*
go manet ang. E X G = H G X. [k] quare rectæ E X, G H parallelæ k *27. 1.*
sunt.

Porro, fiat P G. G R [l] :: H G. S. [m] est ergo 2 S, juxta quam pos- l *12. 6.*
sunt ordinatæ ad diametrum G O. item T X × K E (× X V) [n] = C Xq.; m *51. 1. hujus.*
([o] vel T X, C X, K E ÷÷) [p] quare T X. K E ([c] hoc est T F. F E, [q] vel n *38. 1. hujus.*
triang. T X F. F X E) :: (T Xq. C Xq. [p] ::) triang. T X F. X C P. o *17. 6.* p *cor. 20. 6.*
ergo triang. F X E [r] = (X C P [s] =) H X G. item ang. X E F [g] = q *1. 6.*
X G H. ergo reciprocè G H. E X [t] :: E F. G X. [u] unde G H × G X r *9. 5.*
= E X × E F. ergo S × G X. E X × E F [x] :: (S. × G X. G H × G X s *sch. 43. huj.*
[y] :: S. G H [z] :: G R. G P [a] :: E X. E F [y] ::) E Xq. E X × E F. ergo E Xq t *15. 6.* u *16. 6.*

x *7. 5.* y *2. 6.* z *constr. et inversè.* a *4. 6.*

[b] =


117
118
119
124
125
126
127
131
132
133
134
138
139
140
144
145
146
147
153
154
155

6

$LM \times MK$. (Nam $LM \times MK$ [d] $= LH \times MK$ [e] $(KE \times MK) +$ — d 1.6.
$HM \times MK$ [d] $= KE \times MK + HM \times ME + KE \times HM$ [e] $= KE \times$ — e 16. *hujus.*
$HK + HM \times ME$.)

Prop. XXIV.

Si parabolæ occurrant duæ rectæ (AB, DC), utraque in duobus punctis, & nullius ipsarum occursus, alterius occursibus contineatur, convenient inter se extra sectionem. Fig. 118.

Per B, C puncta ductæ sint diametri EF, GH. [a] Hæ parallelæ sunt, [b] nec alibi occurrunt sectioni. unde junctâ BC, erunt anguli ABC, DCB simul duobus rectis majores. [c] ergo AB, DC extra sectionem concurrent ad partes EG.

a cor. 46. 1. *huj.* b 26. 1. *hujus.* c 13. ax. 1.

Prop. XXV.

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ (EF, GH), utraque in duobus punctis, nullius autem ipsarum occursus alterius occursibus contineatur, convenient quidem inter sese extra sectionem, sed tamen intra angulum (BAC) qui hyperbolen continet. Fig. 119.

Ducantur AF, AH, & connectatur FH. & quoniam EF, GH secant angulos AFH, AHF, concurrent intra angulum FAH, & propterea magis intra angulum BAC. Idem discursus valet, si utraq; EF, GH sectionem contingunt; aut si una contingat, altera duobus punctis secet. *vid. cor.* 31. 1. *hujus.*

Prop. XXVI.

Si in ellipsi, vel circuli circumferentia, duæ rectæ lineæ (CD, EF) non transeuntes per centrum (H), se invicem secent (in G), bifariam sese non secabunt. Fig. 120.

Per G ducatur diameter AB; súntque omnes, quas AB bisecat, tangenti ad A [a] parallelæ, & proinde sibi invicem parallelæ. Ergo CD, EF non bisecantur in G. *Q. E. D.* a 6. *hujus.*

Prop. XXVII.

Si ellipsim, vel circuli circumferentiam contingant duæ rectæ lineæ (CD, EF; & siquidem ea (AB), quæ tactus (A, B) conjungit, per centrum Fig. 121. 122.

centrum transeat sectionis, contingentes lineæ (C D, E F) sibi ipsis æquidistabunt; sin minùs, convenient inter sese ad easdem partes centri.

a 6. *hujus.* b 30. 1. c *ex priore parte hujus.* d 29. 1. e 13. *ax.* 1.

Si A B per centrum transit, [a] erit utraque C D, E F ordinatim applicatis parallela, [b] ergo sibi invicem. Sin A B non transeat, per centrum, ducatur diameter A H, & per H tangat K L. [c] ergo C D, K L parallelæ sunt: [d] quare anguli B A H, K H A duobus rectis minores sunt. [e] ergo E F, H K convenient ad partes B H: & proinde E F, A C convenient ad partes A B. *Q. E. D.*

Conversè; si C D, K H æquidistent, transibit recta quæ tactus connectit per centrum.

Prop. XXVIII.

Fig. 123. Si in coni sectione, vel circuli circumferentia duas lineas æquidistantes (A B, C D) bifariam secet recta linea (F E) diameter erit sectionis.

Sola enim F E bisecat parallelas ad A B.

a 5. & 6. *huj.* b 46. *et* 47. 1. *hujus.*

Si fieri potest, sit alia F G diameter. [a] ergo quæ tangit sectionem in G, est ubique A B, C D parallela. unde C H $\overset{b}{=}$ ($\frac{1}{2}$ C D =) C E. *Q. E. A.*

Prop. XXIX.

Fig. 124. 125. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (B A, C A). in idem punctum (A) conveniant; & ab eo, ad punctum (D), quod lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam secat. ducatur alia linea (A D), sectionis erit diameter.

a 5. *hujus.* & 47. 1. *huj.* b *hypoth.* c * d 1. *ax.* e 9. *ax.*

Si fieri potest, sit alia D E diameter; jungatúrque C E, * sectioni occurrens in F, per quod ducatur F H K G ad C B parallela. ergo F H [a] = H K. item (ob C D $\overset{b}{=}$ D B) [c] est F H = H G. [d] ergo H K = H G.* *Q. E. A.*

Prop. XXX.

Fig. 126. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (B A, C A) in unum punctum (A) conveniant, diameter (A D), quæ ab eo puncto ducitur lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam secabit.

a 29. *hujus.* b *cor.* 46. 1. *huj.*

Si fieri potest sit B E = E C; ducatúrque A E. [a] ergo A E est quoque diameter sectionis. [b] ergo in parabola A E, A D sunt parallelæ;

læ; in reliquis sectionibus A [c] est centrum. Quæ sunt absurda. c vid. 47. 1. hujus.

Prop. XXXI.

Si utramque oppositarum sectionum (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C D, E F), siquidem ea (A B), quæ tactus (A, B) conjungit, per centrum transeat, contingentes lineæ (C D, E F), æquidistantes erunt; sin minus, convenient inter sese ad easdem partes centri Fig. 127. 128.

Probatur, ut 27ma hujus.

Prop. XXXII.

Si utrique oppositarum sectionum occurrant rectæ lineæ (A B, C D), ipsas vel in uno puncto contingentes, vel in duobus secantes, & productæ inter se conveniant; punctum in quo conveniunt, erit in angulo (K L G), qui deinceps est angulo (G L H, vel F L K) sectiones continenti. Fig. 129.

Sint F G, H K sectionum asymptoti; hisce [a] occurret utraque A B, C D. productæ igitur occurrent sibi invicem sub angulo H L F, vel G L K, prout inclinantur ad has, aut illas partes. a 8. hujus.

Prop. XXXIII.

Si oppositarum sectionum (A, B) uni (A) occurrens recta linea (C D) ex utrâque parte extra sectionem cadat; cum altera sectione (B) non conveniet; sed transibit per tres locos, quorum unus quidem est sub angulo sectionem continente, duo verò sub iis angulis, qui deinceps sunt. Fig. 130.

Liquet C D [a] occurrere asymptotis duobus punctis; ergo non alibi; ergo non alteri sectioni, quam semper complectuntur asymptoti. a 8. hujus.

Prop. XXXIV.

Si oppositarum sectionum unam (A) contingat recta linea (CD); & huic ducatur æquidistans (E F) in altera sectione (B); quæ à tactu (A) ad (G) medium lineæ æquidistantis (E F) ducitur (A G), oppositarum sectionum diameter erit. Fig. 131.

Si fieri potest, sit altera A K diameter. [a] ergo tangens per occursum H parallela est ad C D, ideóque ad E F. [b] quare E K [b] = (K F = [c] $\frac{1}{2}$ EF [c] =) E G. [d] *Q. E. A.* a 5 hujus. b 47. 1. hujus. c hyp. d 9. ax. 1.

Prop. XXXV.

Fig. 132. Si diameter (A B) in oppositarum sectionum una (B) rectam lineam (C D) bifariam secet (in E), quæ in diametri termino (A) contingit alteram sectionem (A), lineæ bisectæ (C D) erit æquidistans.

a 48. 1. bujus.
b hyp.
c 2. 6.
d 22. 1. buj.

Si fieri potest, sit altera D F tangenti parallela. ergo D G [a] = G F. Item D E [b] = E C. [c] ergo C F ad E G est parallela. [d] *Q.E.A.*

Prop. XXXVI.

Fig. 133. Si in utraque oppositarum sectionum (A, B) ducantur rectæ lineæ (C D, E F) inter se æquidistantes, quæ (G H) ipsarum medium conjungit, oppositarum sectionum diameter erit.

a 5. bujus.
b 30. 1.
c 48. 1. bujus.
d hyp.
e 9. ax. 1.

Si fieri potest, sit altera G K diameter: [a] ergo tangens per A ad C D parallela est; [b] adeóque ad E F. unde E K ([c] = K F = $\frac{1}{2}$ E F [d] =) E H. [e] *Q. E. A.*

Prop. XXXVII.

Fig. 134. Si oppositas sectiones (A, B) secet recta linea (C D), non transiens per centrum X; quæ (E X) ab ipsius medio (E) ad centrum ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta appellatur: transversa verò diameter, ipsi conjugata, est ea (A B), quæ per centrum ducitur æquidistans lineæ bisectæ (C D).

a 30. 1. bujus.
b hyp.
c 2. 6.
d 4. 6.
e 34. 1.
f 6. bujus.
g 16. 1. bujus.

Ducatur D X sectioni [a] occurrens in F, & connectatur F C, & producatur B A G. Atque ob C E [b] = E D; & F X [a] = X D [c] erit F C ad X E parallela, & F G [d] = (X E [e] =) GC. [f] quare F C tangenti ad A parallela est. [g] ergo A B, & E X sunt conjugatæ diametri. *Q.E.D.*

Prop. XXXVIII.

Fig. 135. Si oppositas sectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C X, D X), convenientes in uno puncto (X); quæ (X E) ab eo puncto ad medium (E) lineæ (C D) tactus (C, D) conjungentis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta vocatur, transversa verò ipsi conjugata (A B), quæ per centrum ducitur, æquidistans lineæ (C D) tactus conjungenti.

Si

Si fieri potest, sit altera E F recta diameter, cui occurrat D X (producta in F; & connectatur C F;[a] sectioni occurrens in A; per quod ducatur A B ad C D parallela. ergo A G[b] = G B. item (ob C E[c] = E D) est A G[d] = G K.[e] unde G B = G K.[f] *Q. E. A.*

a 32. 1 *hujus.*
*b 12. *def.* 1 *hujus.*
c *hyp.*
d *cor.* 2. 6.
e 1. *ax. f.* 9. *ax.*

Prop. XXXIX.

Si oppositas sectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C E, D E) in unum punctum (E) convenientes; quæ (E F) per punctum illud (E), & centrum ducitur, lineam tactus (C, D) conjungentem bifariam secabit. Fig. 136.

Si fieri potest, sit C G = G D.[a] ergo ducta G E erit diameter:[b] atqui F E est diameter. ergo intersectio E est centrum sectionis.[c] *Q. E. A.*

a 38. *hujus.*
b *hyp.*
c 32. *hujus.*

Prop. XL.

Si oppositas sectiones (A, B) contingentes duæ rectæ lineæ (C E, E D) in unum conveniant; & per punctum (E), in quo conveniunt, ducatur linea (F G) æquidistans tactus conjungenti (C D), & sectionibus occurrens (in F, G); quæ (F H, G H) ab occursibus ad medium (H) lineæ (C D) tactus conjungenti ducuntur, sectiones ipsas contingunt. Fig. 137.

Ducatur E H,[a] erit hæc recta diameter; & transversa A B, ducta per centrum X ad C D parallela: unde E X × X H[b] æquatur quartæ parti figuræ ad A B. Hinc, cùm F E[c] sit ordinatim applicata,[d] liquet F H tangere sectionem A. Pari modo G H sectionem B continget. *Q. E. D.*

a 37. *hujus.*
b 38. 1 *hujus.*
c 38. *hujus.*
d 38. 1. *hujus.*

Prop. XLI.

Si in oppositis sectionibus duæ rectæ lineæ (A D, C B), se invicem secent, (in E) non transeuntes per centrum (X), sese bifariam non secabunt. Fig. 138.

Ducatur E X; ergo si A D, C B se mutuò bisecent in E,[a] erit E X diameter conjugata illi X F, quæ per X ducitur ad C B parallela; eritq;* E X * tangenti ad F parallela. Pariterque (ducta X H ad D A parallelâ) erit E X tangenti ad H parallela.[c] Ergo tangentes ad F, H sibi invicem parallelæ sunt.[c] *Q. E. A.*

a 37. *hujus.*
* *vid.* 37. *huj.*
c 31. *hujus.*

Prop. XLII.

Fig. 139. Si in oppositis sectionibus (A, B; C, D) quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (E F, G H) se invicem secent, non transeuntes per centrum (X); bifariam sese non secabunt.

a 37. *hujus.* * 5. *hujus.* b 21. *hujus.* Per centrum X ducantur A B ad E F, & C D ad G H parallelæ, & connectatur X K: posito igitur ipsas E F, G H se mutuò bisecare, [a] erunt X K, A B, & X K, C D conjugatæ diametri, unde tangens per A tangenti per C erit parallela (utpote utraque ipsi X K) quod fieri nequit: [b] conveniunt enim hæ ad unam asymptoton. Ergo E F, G H se mutuò non bisecant.

Prop. XLIII.

Fig 140. Si unam (A) oppositarum sectionum (A, B; C D) quæ conjugatæ appellantur, secet recta linea (E F) in duobus punctis (E, F); & a centro (X) ducantur duæ lineæ (X G, X C), una quidem (X G) ad medium (G) lineæ secantis (E F), altera verò (X C) ipsi (E F) æquidistans, erunt hæ (X G, X C) oppositarum sectionum conjugatæ diametri.

a 5. *hujus.* b *hyp.* & 30. 1. c 20. *hujus.* Nam quia tangens in A ad E F [a] parallela est; & [b] proinde ad C X, [c] erunt A X, C X conjugatæ diametri.

Prop. XLIV. Probl. 2.

Fig. 141. Datâ coni sectione (A C E), diametrum invenire.

Analysis. Factum sit; & sit C H diameter; & ad hanc ordinatim applicentur A E, B D: bisecat has diameter C H in H, & F.

a 28. *hujus.* *Compositio.* Ducatur utcunque recta A E sectionem secans punctis A, B; & huic parallela fiat BD; bisecentur hæ in H & F; & connectatur H F C. [a] Erit H C diameter sectionis. Eodem licet modo infinitas diametros invenire.

Prop. XLV. Probl. 3.

Fig. 142. 143. Datâ ellipsi, vel hyperbola centrum invenire.

a 44. *hujus.* [a] Duæ ducantur utcunque sectionis diametri A B, C D; erit harum intersectio centrum sectionis.

Prop.

Prop. XLVI. Probl. 4.

Datæ parabolæ (F C E) axem invenire. Fig. 144.

Analysis. Sit C D axis, eique perpendicularis F E; est ergo FD = D E. Quòd si ducatur utcunque diameter AB, [a] erit hæc ipsi CD parallela; atque idcirco ipsi F E perpendicularis. Hinc

a 46. 1. *hujus.*

Componitur sic. [a] Ducatur utcunque diameter A B, eique [b] statuatur perpendicularis E F; bisectaque E F in D, [b] erigatur perpendicularis D C; erit hæc axis parabolæ: est enim D C diameter, [a] quia parallela diametro A B; & bisecat ipsi perpendiculares E F, (neque enim ulla alia ipsas bisecabit) [c] ergo est axis.

a 44. *hujus.*
b 11. 1.
c 18. *def.* 1. *hujus.*

Prop. XLVII. Probl. 5.

Datæ hyperbolæ, vel ellipsis (A B C) axes invenire. Fig. 145. 146.

Analysis.

Esto K D axis; ergo [a] bisecat hæc sibi perpendiculares utcunque ductas A C, in D. Itaque si è K [b] centro sectionis connectantur K A, KC, [c] erunt K A, K C æquales. Hinc

a 18. *def.* 1. *hujus.*
b 45. *hujus.*
c 4. 1.

Compositio.

[d] Sume K centrum sectionis, & centro K duc utcunque circulum A E C, sectioni occurrentem punctis A, C, quæ connectat recta AC; bisecetur autem A C in D, & connectatur DK. Erit DK axis. Fig. 147. 148.

Nam ductis K A, K C, [e] liquet trigona K D A, K D C sibi mutuò esse æquilatera, & [f] proinde æquari angulos K D A, K D C; ac idcirco rectos esse: [g] unde K D est axis.

Quòd si per K ducatur MN ipsi AC parallela, [h] erit M N axis conjugatus ipsi K D.

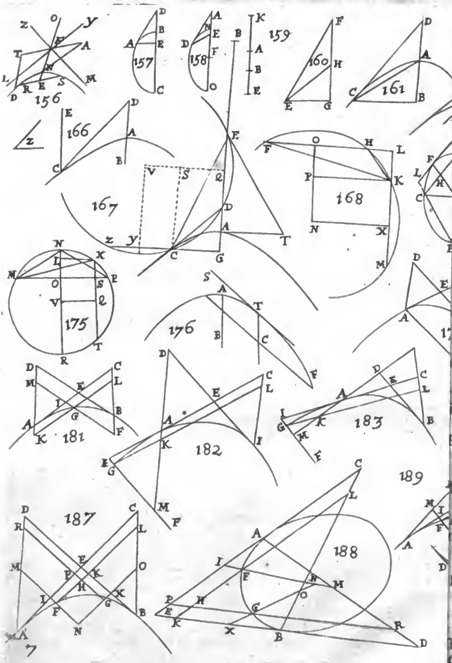
d 45. *hujus.*
e *constr.*
f 8. 1.
g 18. *def.* 1. *huj.*
h 16. 1. *hujus.* & 19. *def.* 1. *h.*

Prop. XLVIII.

His autem demonstratis, superest ut ostendamus non esse alios axes ipsarum sectionum.

Si fieri potest, sit alius axis K G. ergo ductâ ad hanc perpendiculari A H, [a] erit L H = A H; adeóque (junctâ K L) K L [b] = (K A [c] =) K C: ideóque circulus A E C etiam transit per L, quod in hyperbola manifestè absurdum; in ellipsi verò, ducantur C R, L S ad M N perpendiculares. Et propter L Sq + S Kq [d] = (L Kq [c] = C Kq [d] =) C Rq + R Kq. & M S × S N + S Kq [f] = (K Mq [f] =) M R × R N, + R.

a 18. *def.* 1. *huj.*
b 4. 1.
c *constr.*
d 47. 1.
e *prius.*
f 5. 2.



S ×
S ×
=
S q
o-
on-
b eo
n A
A E
BC,
quet
dicu-
pen-
inget
B axi
llelā,
A G,
njun-
K B,
t igi-
Com-

Compos. E puncto A ducatur A E axi perpendicularis, [n] secetúrque K B in D, ut sit K D. D B :: K E. E B; jungatúrque D A. [o] Continget hæc sectionem. n 16. 6. o 34.1. *hujus.*

Punctum A sit in axe. 2 *Cas.*

Anal. Tangat A D, & sit D E axi perpendicularis: itaque rursus K E. E B :: [m] K A. A B. Fig. 153.

Compos. * Fiat K E. E B :: K A. A B. & per E ducatur axi perpendicularis E D, sectioni occurrens in D; & connectatur D A; * hæc sectionem continget. * *Not.* 1.

Sit datum punctum A alicubi intra angulum L F M. 3 *Cas.*

Anal. Tangat A D, junctáque F A producatur, & fiat F O = F N; & * ordinatim applicetur D E. Est ergo O E. E N [p] :: O A. A N. Fig. 154. * p 36. 1. *hujus.*

Compos. Juncta F A producatur, & sumatur F O = F N. fiátque [q] O E. E N [q] :: O A. A N. & ordinatim applicetur E D; jungaturq; [r] D A. [r] Tanget hæc sectionem. q *Not.* 1. r 34. 1. *huj.*

Sit punctum A in F M unâ asymptoton. 4 *Cas.*

Anal. Tangat A D sectionem, asymptoto F L occurrens in P; sitque D Q ad L F parallela: atque ob A D [s] = D P, [t] erit A Q [s] = Q F. Hinc Fig. 155. s 3. *hujus.* t 2. 6.

Compos. Bisecetur A F in Q, & per Q ducatur Q D ad F L parallela, sectioni occurrens in D, jungatúrque D A. Continget hæc sectionem. Nam productâ A D in p, ob A Q [v] = Q F, [x] erit A D = D P. [y] quare A D tangit sectionem. u *constr.* x 2. 6. y 9. *hujus.*

Punctum A sit in loco, qui deinceps est angulo L F M sectionem continenti. 5. *Cas.*

Anal. Tangat A D; junctáque A F producatur, cui parallela utcunque in sectione sumatur R S; & bisectâ R S in E, connectatur E F, & fiat F O = F N; est igitur E O diameter [z] ipsi A F conjugata; & per D ductâ D T ad E O parallelâ, erit [a] A F × F T quarta pars figuræ ad O N. Hinc Fig. 156. z 2. 37. *hujus.* a *cor.* 38. 1. *huj.*

Compositio. * Juncta A F producatur, eíque parallela utcunque ducatur R S (sectioni occurrens punctis R, & S); bisecetur R S in E; junctáque E F producatur, & fiat F O = F N, [z] ergo O N est transversa diameter, ipsi A F conjugata. * Fiat A F × F T æqualis quartæ parti figuræ ad O N, & per T ducatur T D ad O N parallela, sectioni occurrens in D, & jungatur D A. [b] Tanget hæc sectionem. * *Not.* 2. b *conv.* 38. 1. *h.*

Sin.

6. Cas. Sin assignetur punctum A intra angulum Y F Z, nulla inde tangens
c 31.1. hujus. duci poterit; ducta enim linea [c] utramque Y F, Z F secabit: ergo non tanget.

Sit tertiò, sectio data ellipsis, cujus axis B C, centrum F.

1 Cas. Datum punctum A sit in sectione.

Anal. Tangat A D, & A E ordinatim applicetur ad axem. Estq;
d 36. 1. hujus. C E. E B :: [d] C D. D B.

Compos. Ducatur A E perpendicularis axi C B; & producatur
Fig. 157. C B, ut sic C E. E B [e] :: G D. D B. & connectatur D A. [f] Tanget
e Not. 2.
f 34. 1. hujus. hæc Ellipsin.

2 Cas. Punctum A sit extra sectionem.

Anal. Tangat A D; & juncta A F producatur, & ordinatim applicata sit D E. Est itidem O A. A N [g] :: O E. E N.
g 36. 1. hujus.

Fig. 158. *Compos.* Connectatur A F sectioni occurens in N, O; fiatque O A.
h 10. 6. A N [h] :: O E. E N. & per E ad A O ordinatim applicetur E D, secti-
k 34. 1. hujus oni occurrens in D; & connectatur D A: [k] tanget hæc sectionem.

Fig. 159. *Not* 1. Datur recta K B secta in A; oportet producere hanc ad E, ita ut sit K E. B E :: K A. A B.

a 12. 6. [a] Fiat K A—A B. A B :: K B. B E. ergo componendo, erit K A. A B :: K E. B E. *Q. E. F.*

Prop. L. Probl. 7.

Fig 160. Datâ coni sectione, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes sectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

Sit sectio primùm parabole, cujus axis A B.

Fig. 161. *Analysis* Tangat D C sectionem, faciens angulum D parem dato
a 40. dat. F. Itaque ductâ C B ad A B perpendiculari, [a] datur ratio D B ad
b 33. 1 hujus. B C; ergo datur ratio A B [b] (½ D B) ad B C. [c]ergo datur angulus
c 41. dat. B A C. [d] quare datur positio rectæ A C, & inde punctum C, &
d 29. dat. hinc tangentis C D positio.

Compos. Sumpto E punctò utcunque in latere dati anguli ducatur E G ad alterum latus F G perpendicularis, & bisectâ F G in H, jungatur H E, fiatque ang. B A C = ang. G H E: & ab occursu C ducatur C B ad A B perpendicularis; productâque A B, sumatur A D
f 35. 1. hujus
g constr. et 15. = A B; & connectatur D C, [f] liquet hanc tangere sectionem Et
h 4. 6. (5. quoniam F G. H G [g] :: D B. A B. & H G. G E [h] :: A B. B C (ob
k constr. ang. G H E [k] = B A C, & [k] rectos ad G & B) erit ex æquo, F G. G E.

G E :: D B. B C. [l] ergo pares sunt anguli F, D. *Q. E. F.* l 6. 6.

Sit secundò Hyperbole, cujus axis A B, centrum X. Fig. 162.

Anal. Tangat D C, faciens angulum parem dato K H G; jun- 163.
gatúrque X C, & statuatur C E axi perpendicularis; est igitur data m 37. 1. *hujus.*
ratio X E × E D ad E Cq [m] (eadem quæ T ad R); item [n] datur ratio n 40. *dat.*
E C ad E D (ob datos angulos E D C, & rectum E). [o] ergo datur o 50. & 8. *dat.*
ratio X E × E D ad E Dq; [p] hoc est ratio X E ad E D. Proinde [q] da- p 1. 6.
tur ratio X E ad E C. [r] ergo datur angulus E X C, & [s] hinc positio q 8. *dat.*
rectæ X C, & hinc punctum C, & hinc tangens C D. r 41. *dat.* s 29. *dat.*

Quòd si ducatur asymptotos X F; [t] liquet angulum E D C majo- t 16. 1.
rem esse angulo A X F, quoniam D C [v] producta ipsam X F secabit. v 3. *hujus.*
Itaque datus angulus non debet esse minor illo, qui sectionem continet.

Compos. Sumatur G punctum utcunque in latere H G dati anguli;
& à G ducatur ad H K perpendicularis G K. [y] Fiat autem T. R ::
M K × K H. K Gq. & connectatur M G: dein fiat ang. A X C = y *Not.*
ang. K M G; & ab occursu C [z] ducatur tangens C D. Dico factum. z 49. *hujus.*

Ducatur enim C E axi perpendicularis: & propter X E. E C [a] :: a *constr.* & 4. 6.
M K. K G. ac [b] ideò X Eq. E Cq :: M Kq. K Gq. & E Cq. X E × E D b 22. 6.
[c] :: (R. T :: [d]) K Gq. M K × K H; erit ex æquo X Eq. X E × E D. c 37. 1. *hujus.* d *constr.*
:: M Kq. M K × K H. [e] hoc est X E. E D :: M K. K H. Verùm E C. e 1. 6. & 11. 5.
X E [f] :: K G. M K. Ergo rursus ex æquo E C. E D :: K G. K H. er- f *priùs & inversè.*
go quum anguli E, K recti sint, [g] erit ang. E D C = K H G. ergo g 6. 6.
factum.

Quòd verò X C sectioni occurrit, sic ostenditur: Ducatur A F ad h *constr.*
X A perpendicularis, angulóque A X F fiat æqualis K H L. Cùm igitur k 1. *hujus.*
sit M K × K H. K Gq (:: [h] T. R [k] ::) X Aq. A Fq [l] :: H Kq. K L q) l 4. & 22. 6.
[m] $\sqsubset$ H Kq. K Gq. [n] erit M K × H K $\sqsubset$ H Kq & proinde M Kq $\sqsubset$ m *constr.* et 8. 5
M K × H K. & M Kq. K G q [o] $\sqsubset$ (M K × H K. K Gq [p] ::) X A q. n 10. 5.
A Fq. quare X Eq. E Cq $\sqsubset$ X Aq. F Aq. & X E. E C q (hoc est o 8. 5.
X A. A N) $\sqsubset$ X A. A F. [r] ergo A N $\sqsupset$ A F. quare X C secat an- p *priùs.* q 4. 6.
gulum E X F; & [s] propterea sectioni occurrit. r 10. 5. s 3. *hujus.*

Sit tertiò sectio ellipsis, cujus axis A B, centrum X. Fig. 164.

Analysis. Tangat C D, faciens angulum D parem dato G; jun- 165.
gatúrque X C, & sit C E axi perpendicularis. Est itaque data ratio a 37. 1. *hujus.*
C Eq ad E D × E X [a] (eadem quæ R ad T). Item ratio C Eq ad E Dq b 40. *dat.*
[b] datur (ob datos angulos D, & E); [c] ergo datur ratio E Dq ad E D c 8. *dat.*
× E X. [d] hoc est ratio E D ad E X. [e] ergo ratio E X ad C E datur. d 1. 6.
[e] quare datur angulus E X C, & hinc [f] positio rectæ X C, & inde pun- e 41. *dat.* f 29. *dat.*
ctum C, adeóq; [g] positio tangentis C D. g 49. *hujus.*

Compos. Sumpto utcunque puncto F in latere dati anguli, ducatur
h *Not.* FH ad GH perpendicularis; & fiat R. T :: [h] FHq. GH × HK;
k 49. *hujus.* junctâque KF, fiat ang. AXC = HKF; & ab occursu C [k] duca-
l *constr.* & 4. & 22. 6. tur tangens CD. Dico factum. Nam ductâ CE ad AB perpendicu-
m 37. 1. *hujus.* lari, propter XEq. ECq [l] :: KHq. HFq. & ECq. ED × XE :: [m]
n *constr.* R. T :: [n] HFq. HG × KH. erit ex æquo XEq. ED × XE :: KHq.
o 1. 6. HG × KH. [o] hoc est XE. ED :: KH. HG. Item EC. XE :: [p] HF.
p *constr. et* 4. 6. HK. ergo rursus ex æquo ED. EC :: HG. HF. Unde cùm ang.
q 6. 6. E [n] = H, [q] erit quoque ang D = G. Ergo factum.

Not. Fieri debet R. T :: FHq. GH × HK. Itaque $\frac{T \times FHq}{R \times GH} =$ HK.

Compos. Fiat R. T :: FH. Q = $\frac{T \times FH}{R}$ tum GH. Q :: FH.

$$HK = \frac{Q \times FH}{GH} = \frac{T \times FH \times FH}{R \times GH}$$

Prop. LI. *Probl.* 8.

Fig. 166. Datâ coni sectione lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto (Z) æqualem.

a 50. *hujus.* In parabola facilè conficitur. [a] Tangat enim hanc utcunque CD
b *cor.* 46. 1. *h.* faciens cum axe AB angulum D parem dato Z; & per tactum C du-
c *constr.* catur CE ad AB parallela: [b] Liquet CE esse diametrum, & angu-
d 29. 1. lum DCE alterno CDA, [c] (hoc est dato Z) [d] æquari. *Q. E. F.*

Fig. 167. In hyperbola verò, cujus axis AB, centrum E.
168. *Analysis.* Tangat CD faciens angulum ECD parem dato; Trigono autem CDE circumscribatur circulus; & ductâ per C ad axem perpendiculari GCZ, per V centrum circuli ducantur VQ ad ZG,
e 1. 6. & VY ad EG parallelæ, & sit CS ad GE parallela. Estque ZG.
f 36. 3. & 7. 5. CG [e] :: (ZG × GC. CGq [f] :: EG × GD. CGq [g] ::) T. R. ergo
g 37. 1. *hujus.* dividendo MC. CG :: T—R. R. & bipartiendo antecedentes [h] YC.
h 3. 3. CG. [k] (hoc est VS. SQ) :: $\frac{T—R}{2}$. R. Hinc
k 34. 1.

l 33. 3. *Compos.* Exponatur utcunque recta FH, super quâ [l] describatur
m 11. 6. segmentum circuli capiens angulum (ut FKH) parem dato Z. A circuli autem centro N ducatur NO ad FH perpendicularis, [m] secetúrque

túrque N O in P, ut sit NP. PO :: $\frac{T-R}{2}$ R. ducatúrque P K ad FH parallela, circulum secans in K, & per K ducatur K L ad protractam F H perpendicularis; & producatur L K M, & perpendicularis huic ducatur N X. Junctâ denique K F, fiat ang. AEC = ang. LFK; & per occursum C [n] ducatur sectionem contingens C D. Dico factum. n 49 *hujus.*

Ducatur axi perpendicularis C G; & quoniam $\frac{T-R}{2}$.R.[o] :: NP. o *constr.* p 1. 6. q 36. 3.
PO (X K. K L) erit (duplando antecedentes) T—R. R :: M K. K L. r 37.1. *hujus.*
& componendo T. R :: M L. K L :. [p] M L × K L. q (F L × H L). s 23. 6.
K Lq :: T. R :: [r] E G × D G. C Gq. Est ergo F L. K L -|- H L. K L t *constr.* u 4. 6.
[s] (F L × H L. K Lq) = E G. C G -|- D G. C G (E G × D G. CGq).
atqui (ob [t] similia trigona F L K, E G C) [v] est F L. K L = E G. CG.
ergo H L. K L :: D G. C G. [x] ergo anguli H K L, D C G pares x 6. 6.
sunt, & [y] proinde reliqui F K H, E C D etiam pares sunt. *Q.E.D.* y 3. ax. 1. z 1. *hujus.*

Quòd verò E C sectioni occurrat, sic ostenditur; sit E T asymptotos, & axi A B ducatur perpendicularis A T. Estque E A q. A T q a *constr.*
[z] :: (T. R ::[a] F L × L H. L Kq) [b] $\sqsupset$ F Lq. K Lq, [c] vel E Gq. C Gq. b 8. 5.
ergo ang. A E T $\sqsubset$ ang. A E C; [d] & proinde E C sectionem secat. c *prius.*

Coroll. Si sit F L × H L. K Lq :: E G × D G. C Gq. erunt trigona H L K, D G C similia. d 2. *hujus.*

Prop. LII.

Si ellipsim (cujus Axes A B, C D, & Centrum E) recta linea (GL) contingat; angulus (L F E), quem facit cum diametro (E F) per tactum (F) ducta, non est minor angulo (LCA) deinceps ei (A C B), qui lineis (A C, B C) ad mediam sectionem (C) inclinatis continetur. Fig. 169. 170. 171.

Sit primò E F ad B C parallela: ergo cùm sit A E [a] = E B, [b] erit A H = H C ergo, cùm E F [c] sit diameter, [d] erit A C tangenti G L parallela: unde ang. L F H [e] = (C H E [e] =) L C H. a *hyp.* b 2. 6. c cor. 47. 1. *huj.*

Sed non sit E F ad B C parallela. ergo ductâ F K ad A B perpendiculari [f] erunt anguli L B E, F E K inæquales, & trigona C B E, F E K dissimilia. Non igitur est E Kq. K Fq :: (B E q. (A E × E B). E Cq, [f] hoc est T. R; [g] hoc est) GK × K E. K Fq. ergo E Kq, & G K × K E sunt inæqualia, & proinde G K, K E inæquales sunt. [h] Capiat circuli segmentum M Y N angulum parem angulo A C B: [k] ergo id semicirculo majus est (nam ob A E, vel B E [l] $\sqsubset$ E C, [m] est uterque angulus d 5. *hujus.* e 29. 1. f *cor. ad def. ad* 16. 1. *huj.* g 37. 1. *hujus.* h 33. 3. k 31. 3. l *hyp.* (1. m 18. 1. & 32.

n 10. 6. A C E, B C E semirecto major, ideóque ang. A C B obtusus). [n] Fiat
N X. X M :: G K. K E & per X ducatur ipsi M N perpendicularis
Y X, & connectantur M Y, N Y; bisectâque M N in T, erigatur ei
perpendicularis O T P, in qua sumpto circuli centro R, ducatur R S ad
Y X perpendicularis; junganturque M O, N O: liquet ang. N O T[o]
($\frac{1}{2}$ N O M) angulo B C E [o] ($\frac{1}{2}$ B C A) æquari; ideóque esse T Nq.
o 4. 1. T Oq [p]:: E Bq. E Cq. Est vero Y S. Γ R q (X S) [r] ⊐ O R. T R. &
p 4. & 22. 6. conversè S Y. X Y ⊏ R O. T O. & duplando antecedentes Z Y. X Y.
q 34. 1. ⊏ P O. T O. & dividendo Z X. X Y. ([o] hoc est Z X × X Y [p] (vel
r 8. 5. N X × X M). X Y q) ⊏ (P Γ. T O q :: T Nq. T Oq [r] :: E Bq. E Cq
o 1. 6. [r] ::) G K × K E. K Fq. Itaque si fiat N X × X M. X Vq :: G K × K E.
p 35. 3. (6. K Fq, [s] erit X V ⊏ X Y. Et quoniam N Xq. N X × X M [t] :: (N X.
q cor. 13. & 20. X M [v] :: G K. K E [t] ::) G Kq. G K × K E. erit ex æquo N Xq. X Vq
r priùs. :: G Kq. K Fq. [x] & N X. X V :: G K. K F; connexâ igitur N V, [y] e-
s 10. 5. rit ang. N V X = ang. G F K. & simili discursu ang. M V X =
t 1. 6. E F K [z] unde totus ang. N V M = G F E. atqui ang. N V M [a] ⊐
u constr. N Y M (A C B). ergo ang G F E ⊐ A C B, & qui deinceps ang.
x 22. 6. E F L ⊏ L C A. *Q. E. D.*
y 6. 6.
z 2. ax. 1.
a 21. 1.

Prop. LIII. Probl. 9.

Fig. 172. Datâ ellipsi (A B C D) contingentem lineam ducere, quæ cum
173. diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo
174. [*] juxta præcedentem. acuto (Y) æqualem. [*] Oportet autem acutum angulum
175. datum non esse minorem angulo (A C G) deinceps ei
(A C B), qui lineis (A C, B C) ad mediam sectionem
inclinatis continetur.

Sit primò datus ang. Y = A C G per centrum E ducatur E K ad B C parallela; & per occursum K sectionem contingens G H. Dico factum.

a hyp. Nam ob A E [a] = E B, [b] erit A F = F C: ergo cùm K E sit diameter,
b 2. 6. [c] erit A C tangenti H G parallela. ergo ang. E K G [d] = (E F C [d] =
c 5. hujus. A C G = [e]) Y. *Q. E. F.*
d 29. 1.
e hyp. Sin. ang. Y ⊏ A C G, erit qui deinceps Z ⊐ A C B. Exponatur
f 33. 3. utcunque circulus, [f] in quo segmentum M N P capiat angulum parem
g cor. 1. 3. angulo Z; bisectâque M P in O, ducatur per O ipsi M P perpendi-
h 4. 1. cularis N R [g] (in quo circuli centrum V), & connectantur M N, P N.
k constr. Itaque ang. A C E [h] ($\frac{1}{2}$ A C B) ⊏ ang. M N O [h] ($\frac{1}{2}$ M N P, [k] vel $\frac{1}{2}$ Z). quare
l cor. ad defin. ad 16. 1. huj. A E. E C ⊏ M O. O N. & A Eq. E Cq. [p] (T. R) ⊏ (M Oq. [q] (N O × O R).
q 35. 3. O Nq [r] ::) O R. O N. ergo componendo T + R. R ⊏ R N. O N. & biparti-
r 1. 6. endo

endo antecedentes $\frac{T+R}{2}$. R ⊏ V N . O N. dividendóque $\frac{T-R}{2}$.

R ⊏ V O. O N. Sit $\frac{T-R}{2}$. R :: V O . O ∥ [s] (⊐ O N). & per I [s] 10. 5.

ducatur I X ad M P parallela, & per X ipsa X S T ad N R parallela,

& V Q ad M P parallela. ergo cùm $\frac{T-R}{2}$. R [t] :: (V O . O I [u] ::) [t] *constr.* (5. v 34. 1. & 11.

Q S. S X. erit componendo $\frac{T+R}{2}$. R :: Q X, S X. & duplando

antecedentes, T+R. R :: T X. S X. & dividendo T . R :: T S. S X. Connectantur igitur M X. P X, & fiat ang. A E K = ang. M P X. & per occursum K ducatur G H tangens sectionem. Dico factum. Nam [x] ordinatim applicetur K L. éstque H L × L E. K Lq [x] :: (T. R [y] :: T S. S X [z] ::) T S × S X [a] (M S × S P). S X q. [b] ergo H L . K L + L E. K L [b] (H L × L E. K Lq ⊐ M S × S P. S Xq [c] =) M S. S X + S P. S X. atqui ([d] ob ang. A E K = M P X, & rectos ad L, & S) [e] est LE. K L :: S P. X S. ergo manet H L. K L :: M S. X S. ergo ang. HKL = M X S. ergo totus ang. H K E [f] = (ang. M X P [g] =) ang. Z. & qui deinceps ang. E K G = ang. Y. Ergo factum.

x 21. 3. y prius. z 1. 6. a 35. 3. b 23. 3. c 23. 6. d constr. e 4. 6. f 2. ax. 1. g constr.

Coroll. Si H L × L E. K Lq :: M S × S P. X S q. Erit trigonum H L K simile trigono M S X.

Problema.

Linea E F coni sectionem secet, oportet huic parallelam ducere, quæ sectionem contingat. Bisecetur E F in C; & per C ducatur diameter sectioni occurrens in T; & per T ducatur T S ad E F parallela, hæc sectionem continget. Res liquidò patet. Fig. 176.

APOL-

APOLLONII CONICORUM

LIB. III.

Prop. I.

Fig. 177. SI coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes rectæ
178. lineæ (A C, B D) inter se conveniant (in E), perque tactus (A,
B) ducantur diametri (A D, B C), quæ contingentibus occurrant (in
179. D, C); triangula (A E D, B E C) ad verticem facta, sibi ipsis æ-
180. qualia erunt.

Per A ducatur A F ad B D parallela. Estque (in parabola) *p g r.*
a 42. 1. *hujus.* A D B F [a] = triang. A C F: ablatóque communi trapezio A E B F,
b 37. 1. *hujus.* restat triang. A E D = triang. B E C. *Q. E. D*
c 1. 6. In aliis verò sectionibus (ob G F . G B [b] :: G B. G C) [d] est G F.
d *cor.* 20. 6. G C. ([c] hoc est triang. G F A. G C A) [d] :: (G Fq. G Bq [e] ::) triang.
e 1, & 22. 6. G F A. G B D. [f] quare triang. G C A = G B D. & proinde (abla-
f 9. 5. to vel addito communi quadrilatero) remanet triang. A E D = triang.
B E C. *Q. E. D.* *Coroll.* Triang. G C A = triang. G B D.

Prop. II.

Fig. 181. Iisdem positis, si in coni sectione, vel circuli circumferentia, suma-
182. tur aliquod punctum (G), & per ipsum ducantur (K G L, F G M) æ-
183. quidistantes contingentibus usque ad diametros; quadrilaterum (G L
184. G I) factum ad (A C) unam contingentium, & ad (B C) unam dia-
185. metrorum, æquale erit triangulo (A I M), quod ad eandem contingen-
186. tem (A C) & ad alteram diametrum (A D) constituitur.

Nam

Nam ob triangulum G K M [a] æquale quadrilatero A K L C, liquet (addito vel ablato communi A I G K) tota, vel residua A I M, G I C L æquari. a 42, vel 43. 1. hujus.

Prop. III.

Iisdem positis, si in coni sectione, vel circuli circumferentia, sumantur duo puncta (F, G) & per ipsa ducantur (F H K L, N F I M, & G H P R, N G X O) æquidistantes contingentibus, usque ad diametros, quadrilatera ((L G, R F, & L N, R N) quæ ab ipsis fiunt, in diametris constituta, inter se æqualia erunt. Fig. 187. 188. 189.

Nam quadrilat. G O L H + 4lat. H L C P [a] = 4lat. G O C P [b] = triang. A R P = [a] 4lat. M I P R + triang. A I M [c] (hoc est = 4lat. M I P R + 4lat. F L C I [d] =) 4lat. M F H R + 4lat. H L C P. [e] ergo 4lat. G O L H = 4lat. M F H R. & [f] proinde etiam quadrilat. N O L F = quadrilat. N M R G. *Q. E. D.*

a 19. ax. 1.
b 2. 3. hujus.
c 2. ax. 1. & 2. 3. hujus.
d 2, & 3. ax. 1.
e 3. ax. 1.
f 2. ax. 1.

Prop. IV.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ lineæ (A C, B C) inter se conveniant (in C), & per tactus (A, B) ducantur diametri (A D H, B D G) contingentibus occurrentes (in F, G), triangula (A C F, B C G), quæ ad contingentes constituuntur, sibi ipsis æqualia erunt. Fig. 190.

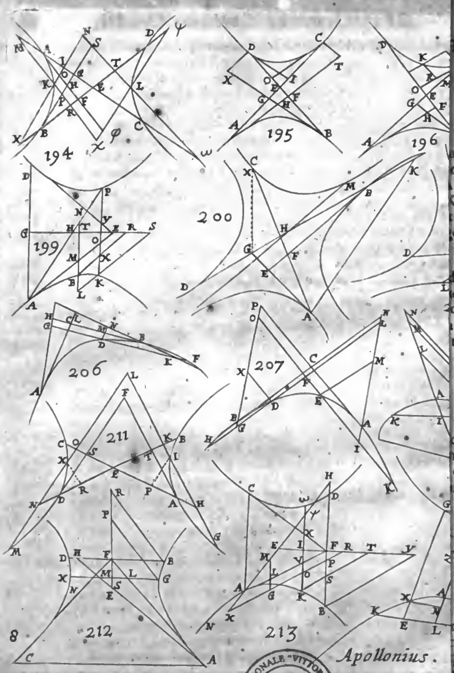
Per H ducatur tangens H L. [a] Hæc tangenti A G parallela erit; [b] & A D = H D. quare triang. A G D. [c] = (triang. H L D [d] =) triang. B F D. Proinde (addito communi G D F C) erit triang. A C F = triang. B C G. *Q. E. D.*

a cor. 44. hujus.
b 30. 1. hujus.
c 4. 6. & 8. 1.
d 1. 3. hujus.

Prop. V.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ (E D, F D) sibi ipsis occurrant (in D), & in sectionum quavis (B) sumatur aliquod punctum (G), à quo ducantur duæ lineæ, una quidem G M æquidistans contingenti (F D), altera verò (G K H L) æquidistans ei (F E), quæ tactus (E, F) conjungit, triangulum (G H M), quod ab ipsis constituitur ad diametrum (C D) per occursum ductæ, à triangulo (K H D), quod est ad occursum contingentium, differt triangulo (F K L) facto ad contingentes, & ad diametrum (F C), quæ per tactum (F) ducta fuerit. Fig. 191.

Nam



que
aod
on-
F,
KF)
ro-
gen-
dito
ctâ
2que
ng.
tri-
qua
ntes
oc-
sti-
EI
I;
me-
on-
qua-
tero

drilatero F C, & quadrilaterum X I quadrilatero T O æquale esse.

Nam ob trigona A E F, B E G [a] æqualia, [b] erit AE. EG :: B E. E F; & [c] conversè, A E. A G :: B E. B F. item A C. A E :: ([d] 2. 1 [d] ::) B D. B E. ergo ex æquali A C. AG :: BD. B F. ergo [e] triang. ACT. A G H :: triang. B D X. B F H. atqui triang. A G H [f] = B F H. ergo triang. A C T [g] = B D X: [h] quare 4lat. C H = 4lat. D H. & 4lat. C F = 4lat. D G. Adhæc triang. C E O [k] = triang A E F [l] = triang. B E G [k] = triang. D E I. [m] ergo 4lat X I = T O. Quæ E. D.

a 1. *hujus.*
b 15. 6.
c *cor.* 19. 5.
d 30. 1.
e 22. 6.
f 1. *hujus.*
g 14. 5.
h 3. *ax.* 1.
k 8. 1.
l *cor.* 1. *hujus.*
m 2. *ax.* 1.

Prop. IX.

Iisdem positis, si alterum quidem punctum, ut K, sit inter diametros, alterum vero sit idem quod unum punctorum C, D, ut C; & ducantur æquidistantes; dico triangulum C E O æquale esse quadrilatero K E, & quadrilaterum L O ipsi L M æquale esse. Fig. 196.

Nam triang. C E O [a] = (triang. A E F [b] =) 4lat K E. [c] ergo triang C R M = 4lat. K O. & 4lat. L M = 4lat. L O.

a 4. *hujus.*
b *cor.* 6. *huj.*
c 3. *ax.* 1.

Prop. X.

Iisdem positis sumantur K, L, non tamen in punctis, in quibus diametri sectionibus occurrunt, demonstrandum est quadrilaterum L T R X quadrilatero • X K I æquale esse. Fig. 197.

Nam triang. T Y E — Y • L [a] = (triang. B E G [b] = triang. A E F [a] =) triang X E I — X R K. [c] ergo triang. T Y E + X R K = triang. X E I + Y • L. additóque utrinque spatio K X E Y L χ, [c] erit 4lat. L T R χ = • χ K I. *Q. E. D.*

a 43. 1. *hujus.*
b 1. *hujus.*
c 1. *ax.* 1.

Prop. XI.

Iisdem positis, si in quavis sectione (A B) sumatur punctum B, & ab ipso lineæ æquidistantes ducantur; una quidem (B M) contingenti (A E) æquidistans, altera verò (B L) æquidistans ei (A D) quæ tactus conjungit; triangulum (B F M) quod ab ipsis fit ad diametrum (G M) per occursum (E) contingentium ductam, à triangulo (AKL) contento lineâ contingente (A K) & diametro (A H L) per tactum, differt triangulo (K E F), quod ad contingentium occursum constituitur. Fig. 198.

a 45.1 *bujus.* Nam triang. B M F[a] = (triang. L H F + triang. H A E[b] =)
b 19. *ax.* 1. triang. A K L + triang. K F E.
c 3. *ax.* 1. *Cor.* 4 lat. B K E M[c] = triang. A K L.

Prop. XII.

Fig. 199. Iisdem positis, si in una sectione (AB) sumantur duo puncta (B,K), & ab utrisque similiter ducantur æquidistantes (B L M N, K O X P ad A D; & B X K, K E S ad B E); quadrilatera (B P, K R) ab ipsis constituta, æqualia erunt.

a *cor.* 11. *buj.* Nam quia triang. A O P[a] = 4lat K O E S; & triang. A M N[a] = 4lat B M E R; [b] erit 4 lat. M O P N (= triang A O P — triang.
b 3. *ax.* 1. A M N)[b] = (4lat K O E S — 4lat B M E R[b] =) 4lat K X R S
c 2. *ax.* 1. — 4lat B M O X. [c] unde 4lat K X R S = (4lat M O P N + 4lat B M O X =) 4lat B X P N. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Fig. 200. Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D), quæ conjugatæ appellantur, rectæ lineæ (A F, B E) contingentes sectiones (A, B), quæ deinceps sunt, in unum punctum (E) conveniant, & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H C, B H D); triangulâ (B F H, A G H), quorum communis vertex est sectionum centrum (H), inter se æquales erunt.

a 20.2. *bujus.* Per puncta A, & H ducantur A K, L H M ad B E parallelæ; [a] li-
b 4. 6. quétque esse L M, D B diametros conjugatas. Itaque K H. H B [b] (hoc
c 38.1. *bujus.* est A H, H F) [c] :: H B. H G. [d] ergo triang. A G H [d] = triang. BHF.
d *Not.* *Q. E. D.*
e 12. 6. *Not.* [e] Sit H X. H F :: (H B. H G [f] :: A H. H F) [g] ergo H X =
f 11. 5. A H. & ideo triang. A E H [h] = triang. H G X [k] = triang. B H F.
g 9. 5.
h 1. 6.
k 15. 6.

Prop. XIV.

Fig. 201. Iisdem positis, si in quavis sectione (B) sumatur punctum (X), & ab ipso ducantur lineæ (X R S, X O T) æquidistantes contingentibus usque ad diametros (B H D, A H C); triangulum (O H T), quod ad centrum (H) constituitur, à triangulo (X T S) circa eundem angulum (T) differt triangulo (H B F, vel A G H) basin habenti lineam contingentem (B F, vel A G) & verticem sectionum centrum (H).

ducatur

Ducatur A Y ad B F parallela; & propter [a] conjugatas diametros L M, D B; & huic ordinatim applicatam A Y, [b] erit A Y. Y G [c](hoc est X T. T S) = H Y. Y A [c] (H B. B F) ⊹ T. R. [d] quare triang. O H T = (triang. X T S ⊹ triang. B F H. [e] =) triang. X T S ⊹ triang. A G H. *Q. E. D.*

a 20. 2 *hujus.*
b 40. 1 *hujus.*
c 4. 6.
d 41. 1. *hujus.*
e 13. *hujus.* & 1. *ax.*

Prop. XV.

Fig. 202. 203.

Si oppositarum sectionum (A B, G S, T, X) quæ conjugatæ appellantur, unam (A B) contingentes rectæ lineæ (A D E, B D C) conveniant (in D), & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H F, B H T); sumatur autem punctum (S) in quavis (G S) sectionum conjugatarum, & ab ipso ducantur contingentibus æquidistantes (S L, S Y) usque ad diametros (B T, A F) triangulum (S L Y), quod ab ipsis ad sectionem constituitur, majus est quàm triangulum (H L F), quod ad centrum (H), triangulo (H C B) basin habenti lineam contingentem (B C) & verticem (H) centrum sectionum.

Ducantur X H G ad B C, & G I K ad A E, & S O ad B T parallelæ. Fiántque D B. B E [a] :: M N. 2 B C [b] :: M P ($\frac{1}{2}$ M N). B C. [c] atque X G. T B :: T B. R. Liquet X G, B T [d] fore conjugatas diametros; & S O (vel L H) [e] ordinatim applicari ad X G, & [f] M N fore rectum latus figuræ ad B T, [g] & R rectum latus figuræ ad X G. Porro D Bq. D B × B E [b] :: (D B. B E [k] :: M P. B C [h] ::) M P × B H. [l] (H Gq). B C × B H. permutandóque D Bq. H Gq [m] (hoc est triang. D B E. triang. G H I) :: D B × B E. B C × B H [n] :: triang. D B E. triang. C B H. unde triang. G H I [o] = triang. C B H. Atqui H L. L F. [p] :: (H B. B C [q] :: H B. M P [r] (R. X G) ⊹ M P. B C [s] (D B. B E vel G H. H I) =) R. X G ⊹ G H. H I [t] = H L. L F. [v] unde triang. S L Y = (triang. H L F ⊹ triang. H G I [x] =) triang. H L F ⊹ triang. C B H. *Q. E. D.*

Not. D B × B E. B C × B H :: triang. D B E. triang. C B H. Nam ducantur C V, D Q ad B H perpendiculares. Estque D Q × B E. D B × B E [a] :: (D Q. D B [b] :: C V. C B [a] ::) C V × B H. C B × B H. & permutando D Q × B E [c] (hoc est 2 triang. D B E) C V × B H [c] (2 triang. C B H) :: D B × B E. C B × B H [d] :: triang. D B E. triang. C B H.

36.
a 1. 4.
b 15. 5.
c 11. 6.
d 20. 2. *hujus.*
e 47. 1. *hujus.*
f 51. 1. *hujus.*
g 4. *def. ad* 16. 1. *hujus.*
h 1. 6.
k *constr.* (6. *prius.* & 17.
l *prius.* & 17.
m 22. 6.
n *Not.*
o 9. 5.
p 4. 6.
q 5. *def.* 6.
r *cor.* 20. 2 *hujus.* & 15. 5.
s *constr.*
t 11. 5.
u 41. 1. *hujus.*
x 2. *ax.*
a 1. 6.
b 4. 6.
c 41. 1.
d 11. & 15. 5.

Prop. XVI.

Fig. 204. 205. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (AC, BC) in unum conveniant (in C); & ab aliquo puncto (D) eorum, quæ sunt in sectione, ducatur linea (DF) uni (BC) contingentium æquidistans, quæ & sectionem, & alteram (AC) contingentium secet (in E, & F); ut quadrata contingentium (BC, AC) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (FE, ED) quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem, ad quadratum lineæ (AE) inter æquidistantem (FE) & tactum (A) interjectæ.

a 46. & 47. 1. b 6. 2. (hujus.) c 1. hujus. d 16. 5. & 21. e 19. f prius. g 2. hujus. h 22. 6.

Per A, B ducantur diametri AGH, KBL; & DN ad AC parallela. [a] Liquet esse FK = KD. [b] unde FE × ED + DKq = EKq. Item CBq. triang CBL [c] (triang CAH). [d] :: EKq triang. EKL [d] :: DKq. triang DKN [e] :: EKq — DKq. triang EKL — triang DKN (hoc est [f] ::) FE × ED. 4lat DL ([g] = triang AEG). ergo permutatim CBq. FE × ED :: (triang CAH. triang AEG [h] ::) CAq AEq. vel iterum permutando CBq. CAq :: FE × ED. AEq. *Q. E. D.*

Coroll. 1. * FE × ED. CBq :: AEq. ACq.

2. $\left\{ \begin{array}{l} \text{DBq. triang. DKN ::} \\ \text{CBq. triang. CBL ::} \end{array} \right\}$ FE × ED. 4lat. DL.

Prop. XVII.

Fig. 207. 208. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (AC, BC) in unum conveniant (in C); sumantur autem in sectione duo quævis puncta (D, E), & ab iis ducantur lineæ (EFIK, DFGH) contingentibus æquidistantes), quæ & sibi ipsis, & * lineæ occurrant; ut quadrata contingentium (AC, BC) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (KF, FE), quæ interjiciuntur inter sectionem, & linearum occursum (F), ad rectangulum quod lineis (HF, FD) similiter sumptis continetur.

* sectioni.

* Cor. 1. præc. a 3. hujus. b 16. 5. & 22. 6. c 1. hujus.

Per A, B ducantur diametri AMLN, BXOP, & DX, EM tangentibus parallelæ. Estque KF × FE. 4lat FM [a] (vel 4lat. FX) * :: (EIq triang EIM [b] ::) ACq. triang ACN [c] (vel triang BCP). Similique discursu, HF × FE. 4lat FX :: CBq. triang BCP. & inversè 4lat FX. HF × FE :: triang. BCP. CBq.

ergo

ergo ex æquali KF × FE. HF × FE :: ACq. CBq. *Q. E. D.* Fig. 209.
Si punctum F intra sectionem cadat, similis est discursus, nisi quod *pro.* 6. 2. adhiberi debeat 5. 2 *Elem.* (in præcedenti.)

Prop. XVIII.

Si oppositas sectiones (A B, M N) contingentes duæ rectæ lineæ (A C L E, B C H) inter se conveniant (in C); sumatur autem in quavis sectione (M N) aliquod punctum (D), & ab eo ducatur linea (D F G E) uni contingentium (B C) æquidistans, quæ & sectionem, & alteram contingentium secet in (F, & E): ut quadrata contingentium (B C, C A) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (FE, E D), quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem (A E) ad quadratum lineæ (A E) inter æquidistantem (F E), & tactum (A) interjectæ. Fig. 210.

Ducatur D X ad A E parallela. Estque F E × E D + D Oq [a] = O Eq. ac B Cq. triang B C L [c] (vel triang A C H) [b] :: (O E q. triang. O E L [b] :: DOq. triang D O X [d] :: F E × E D. 4lat. D L [e] (vel triang. A E G). itemque triang. A C H. A Cq [b] :: triang. A E G. A Eq. Ergo ex æquali B Cq. A Cq :: F E × E D. A Eq. *Q. E. D.*

a 48. 1. *huj.* & 6. 2.
b 15. 5. et 22. 6.
c 1. *hujus.*
d 19. 5.
e 6. *hujus.*

Prop. XIX.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ (AF, DF) in unum conveniant (in F), & ducantur contingentibus æquidistantes, (GHIKL, M N X O L) quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant; ut quadrata contingentium (A F, F D) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (G I, L I) quæ interjiciuntur inter sectionem, & linearum occursum, ad rectangulum, quod lineis (M L, L X) similiter sumptis continetur. Fig. 211.

Sint H A E C, N D E B diametri, & X R, I P tangentibus A F, D F parallelæ. Estque A Fq. triang A F S [a] (vel triang D F T) [b] :: (H Lq. triang H L O [b] :: H Iq. triang H I P [c] ::) G L × L I. 4lat T O [d] (vel 4lat K X). itemque triang D F T. D Fq [e] :: 4lat K X. M L × L X. ergo ex æquo A Fq. D Fq :: G L × L I. M L × L X. *Q. E. D.*

a 4. *hujus.*
b 16. 5. et 22. 6.
c 2 *cor.* 16. *huj.*
d 7. *hujus.*

Prop. XX.

Si quæ oppositas sectiones (A B, C D) contingunt duæ rectæ lineæ (A F, C F) sibi invicem occurrant; & per occursum (F) ducatur linea Fig. 212.

nea (B F H D) tactus conjungenti (A C) æquidistans, quæ secet utramque sectionem (in B D); ducatur autem alia linea (G L S M N X) æquidistans eidem, sectionésque & contingentes secans: erit ut rectangulum contentum lineis (B F, F D), quæ inter occursum sectionum, & sectones interjiciuntur, ad quadratum lineæ contingentis (A F), ita rectangulum, quod continetur lineis (G L, L X) interfectiones, & contingentem interjectis, ad quadratum lineæ (A L) ad tactum abscissæ.

a 38. et 39. 2. hujus. b 45. 1. hujus. c 16. 3. & 22. d 19. 5. (6. e 5. hujus.

Sint A E H, E F diametri; ducantúrque G P, B R ad A E parallelæ. Estque B Fq. [a] (BF × FD). triang B F R [b] (triang A F H) [c] :: L Sq. triang L S H [d] :: G L × L X. 4lat G L F P [e] (triang ALN). Item triang A F H. A Fq [c] :: triang A L N. A Lq. ergo ex æquo B F × F D. A Fq :: G L × L X. A Lq. *Q. E. D.*

Coroll. Triang. B F R. B F × F D :: 4lat G L F P. GL × L X.

Prop. XXI.

Fig. 213. Iisdem positis, si in sectione sumantur duo puncta (G, K), & per ipsa ducantur rectæ lineæ; una quidem (N X G O P, vel K S T) contingenti (A F) æquidistans; altera verò (G L M, vel K O V χ ψ ω) lineæ (A C) tactus conjungenti æquidistans; quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: Erit ut rectangulum contentum lineis (B F, F D), quæ interjiciuntur inter occursum contingentium, & sectiones, ad quadratum contingentis (A F); ita rectangulum contentum lineis (K O, O ω) inter sectiones, & linearum occursum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (N O, O G) similiter sumptis continetur.

a 41. 1. huj. b 46. 5. et 22. 6 c cor. 16. huj. d 12. hujus. e cor. præced.

Nam A F q. triang A F H [a] (triang B Y F) [a] :: X O q. triang. X O ψ [b] :: X G q triang X G M [c] :: N O × O G. 4lat G O ψ M [d] (4lat K O R T). [e] Item triang. B Y F. B F × F D :: [e] 4lat KORT. K O × O ω. ergo ex æquali A F q. B F × F D :: N O × O G. K O × O ω. atque inversè.

Prop. XXII.

Fig. 214. Si oppositas sectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (A C, B D) inter se æquidistantes; ducantur autem aliæ lineæ, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant (una quidem K E M) contingentibus æquidistans, altera verò (G X E) æquidistans ei (A B), quæ tactus conjungit: erit ut transversum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam (A B) tactus conjungentem constituitur; ita rectangulum contentum lineis

lineis (G E, X E) inter sectionem, & linearum occursum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (K E, E M) similiter sumptis continetur.

Ducantur G F, X N ad A C parallelæ: hæ (& parallela his K M)
ad [a] diametrum A B ordinatim applicantur: quare B L × L A. K L q a 31.2. *hujus.*
[b] ::(A B.R [b]:: B N × N A [c] (FA × NA).X Nq. [d] :: B L × L A — FA b 21.1. *hujus.*
× N A. K Lq — X Nq(— E L q) (hoc est) [e] :: F L × LN. [f] K E × E M. c *cor.* 16.1. *huj.*
atqui F L × L N [g] = G E × E X. [h] ergo A B. R:: G E × E X. K E × d 19.5.
E M. *Q. E. D.* e *Not.*
f 5.2.

Not. [e] Quod F L × L N = B L × L A — F A × N A sic patet. g 34. & *sch.* 48.1.
Bisecetur B A, vel F N in Z. Estque B L × L A + Z A q [k] = (Z L q h 7, & 11.5.
[k] = F L × L N + Z Nq [l] =) F L × L N + F A × A N + Z A q k 2.6.
(nam Z Nq [k] = B N × A N + Z Aq). ergo B L × L A = F L × l 2. *ax.* 1.
L N + F A × A N.

Prop. XXIII.

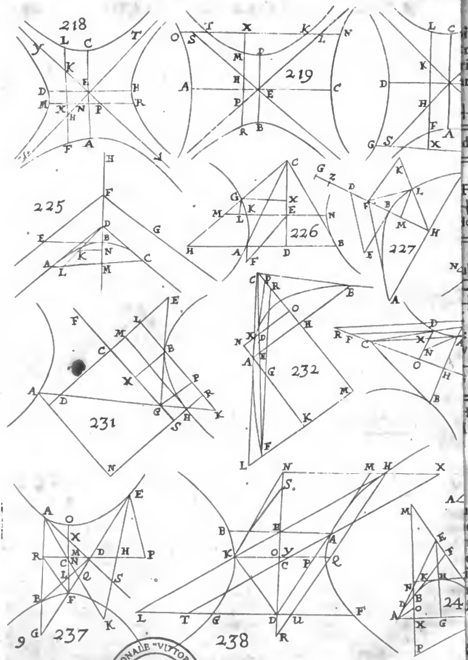
Si in oppositis sectionibus (A B, C D, E F, G H), quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (A L, E L), contingentes oppositas sectiones (A B, E F) conveniant in quavis sectione (in L), ducantur autem aliquæ lineæ (GO, HS) æquidistantes contingentibus (AL, EL), quæ & sibi ipsis, & aliis sectionibus (C D, G H) occurrant: ut quadrata contingentium (A L, E L) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (G X, X O) quæ inter sectiones, & occursum (X) interjiciuntur ad rectangulum, quod lineis (H X, X S) similiter sumptis continetur. Fig. 215.

Ducantur S T ad A L, & O Y ad E L parallelæ. Estque H P * =
P S, & G M * = M O; ac E Lq. triang E V L. [a] (triang. A L χ) a 4 *hujus.*
[b]:: P X q. triang P N X [c]:: H X × H S. 4lat T N X S [d] (X R Y O). b 16.5. *et* 22.
Item triang. A L χ. A Lq [c] :: 4lat. X R Y O. G X × X O. ex æquo c *ut sæpe pius.*
igitur E Lq. A Lq :: H X × X S. G X × X O. Quod *E. D.*

Prop. XXIV.

Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D) quas conjugatas appellamus, à centro (E) ad sectiones ducantur duæ lineæ (A C, D B) quarum una quidem (A C) sit transversa diameter, altera verò (D B) recta; & ducantur aliæ lineæ (F L, M R) his diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant, ita ut occursus (X) sit in loco inter quatuor sectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus (F X, X L) lineæ diametro transversæ æquidistantis, unà Fig. 216. 217.

cum.


218
219
225
226
227
231
232
237
238

XH. SX × XL [c] :: RX × XM. TX × XK :: DEq. EAq; [d] atqui OT × TN = 2AEq. [e] ideóque OX × XN [e] (hoc est TX × XK + OT × TN) = TX × XK + 2AEq. *Q. E. D.* c 19.5. *Not.* 1. d 23. 2 *hujus.* e 2. *ax.* 1. f *Not.*

Not. * PX × XH — PM × MH = RX × XM. & × SX × XL — LK × KS = TX × XK. * *vid. Not. ad* 22 *hujus.* x *v. not. ad* 24 *h.*

Not. OX × XN [z] = TX × XK + OT × TN. z *v. not. ad* 24 *h.*

Prop. XXVI.

Quòd si æquidistantium occursus ad punctum X sit in una sectionum AC, ut positum est; rectangulum (LXF), quod continetur portionibus lineæ æquidistantis transversæ diametro (AC), minus erit quàm illud, ad quod rectangulum (RXG), portionibus alterius lineæ contentum, eandem proportionem habet quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum transversæ, duplo quadrati ejus, quod à dimidia transversæ diametri constituitur. **Fig. 220.**

Nam (simili ratione) DEq. [a] (hoc est VG × GS, [b] vel RS × SG). AEq :: VX × XS. KX × XH [c] :: RS × SG + VX × XS. AEq + KX × XS [d] (hoc est) :: RX × XG. AEq + KX × XH. Atqui AEq [e] = (LH × HF =) KX × XH — LX × XF. & [f] proinde 2AEq + LX × XF = KX × XH + AEq. a 11. 2 *hujus.* b 8. 2. *hujus.* c 12. 5. d *Not.* e 11. 2. *huj.* f 2. *ax.* 1. *huj.*

Not. 1. * RS × SG + VX × XS = RX × XG. * *vid. Not.* 2. *ad* 24. *hujus.*

2. [g] LH × HF = KX × XH — LX × XF. g *v. not. ad* 22. *hujus.*

Prop. XXVII.

Si in Ellipsi vel circuli circumferentia ducantur conjugatæ diametri (AC, BD), quarum altera quidem (AC) sit recta, altera verò (BD) transversa: & ducantur duæ rectæ lineæ (KM, NH) diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: quadrata ex portionibus (NF, FH) lineæ æquidistantis transversæ diametro, quæ inter sectionem, & linearum occursum interjiciuntur, assumentia figuras (KF × Z, & FM × Y) ex portionibus (KF, FM) lineæ, quæ rectæ diametro æquidistat, inter linearum occursum (F), & sectionem interjectis, similes & similiter descriptas ei, quæ ad rectam diametrum constituitur, quadrato transversæ diametri æqualia erunt. **Fig. 221.**

Ducatur NX ad AE parallela. Sintque R, S recta latera pro dia-

metris

a 12. 6. metris B D, A C; [a] fiantque N X. V :: A C. S :: K L. X. Et propter
b 16. 5. R, A C, B D, S ∺ [b] erit R. B D [c] hoc est N Xq. D X × X B) :: A C.
c 21. 1. *hujus.* S [e] :: N X. V [f] :: N Xq. N X × V. Unde N X × V [g] = (D X × X B
e *constr.* [h] =) B Eq − X Eq (− N Gq). Simili discursu K L × X = B Eq −
f 1. 6. F Gq. [k] ergo N X × V + K L × X + N Gq + F Gq = 2 B Eq.
g 9. 5. [l] atqui 2 N Gq + 2 F Gq = H Fq + F Nq. & 2 N X × V + 2 K L
h 5. 2. × X (hoc est 2 F L × V + 2 K L × X) [m] = F M × Y + K F × Z. [n] er-
k 2. *ax.* 1. go H F q + F N q + F M × Y + K F × Z = 4 B E q [o] = B D q.
l 9. 2. *Q. E. D.*
m *ex.* 9. 2.
n 2 *ax.* 1.
o 4. 2.

Prop. XXVIII.

Fig. 222. Si in oppositis sectionibus (A, B C, D), quas conjugatas appellamus, ducantur diametri conjugatæ (A C, B D), ut earum altera (AC) recta sit, altera (B D) transversa; & ducantur duæ rectæ lineæ (F K, L N) diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: Quadrata ex portionibus (L G, G N) lineæ æquidistantis rectæ diametro (A C), quæ inter linearum occursum, & sectiones interjiciuntur, ad quadrata ex portionibus (F G, G K) alterius lineæ, quæ transversæ diametro (B D) æquidistant, inter sectiones, & occursum linearum interjectis, eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ.

* 15. 5. Ordinatim applicentur F O, & L X. Estque A Fq. E Bq :: * A C q.
a *cor.* 19. 6. B Dq [a] :: R. B D :: F Oq (E Hq). D O × O B [b] :: C X × X A. L Xq (E Mq)
b 21. 1. *hujus.* [c] :: A Eq. C X × X A + E Hq. E B q + D O × O B + E M q.
c 12. 5. [d] (hoc est) :: X Eq + E Hq. O Eq + E Mq. [e] (hoc est) :: L Mq.
d 6. 2. + G Mq. F Hq + G Hq [e] :: 2 L Mq + 2 G Mq. 2 F Hq + 2 G Hq
e 15. 5. [f] (hoc est) :: L Gq + G Nq. F Gq + G Kq [g] :: A Cq. B Dq. *Q. E. D.*
f 9. 2.
g 11. 5.

Lemma pro s. q.

Fig. 223. Sit linea recta composita *a* + *b* + *c* + *a*. Erit Quad. *a* + *b* + Quad. *c* + *a* = *bb* + *cc* + 2*a* × : *b* + *c* + *a*. hoc est *aa* + *bb* + 2*ba* + *cc* + *aa* + 2*ca* = *bb* + *cc* + 2*ba* + 2*ca* + 2*aa*.

Prop. XXIX.

Fig. 224. Iisdem positis, si linea (L N) rectæ diametro æquidistans, secet asymptotos; quadrata ex ipsius portionibus (X G, G O), quæ inter linearum occursum, & asymptotos interjiciuntur, assumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus (F G, G K,)

GK) lineæ (FK) quæ transversæ diametro æquidistat, inter occursum linearum, & sectiones interjectis, eandem proportionem habent, quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum transversæ.

Nam ob LX [a] = ON, erit LGq + GNq [b] = XGq + GOq + 2LX × XN [c] (+ 2AEq). ergo XGq + GOq + 2AEq (+ ½ACq). FGq + GKq [d] :: LGq + GNq. FGq + GKq [e] :: AGq. BDq. *Q. E. D.*

a 16. 2. *hujus.*
b *lemm. præc.*
c 10. 2. *hujus.*
d 7. 5.
e 28. *hujus.*

Prop. XXX.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (AD, CD) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, C) producatur linea (AC); per occursum vero (D) ducatur linea (DL) æquidistans uni (FE), asymptoton (FE, FG), sectionémque & lineam tactus conjungentem secans, bifariam dividetur (in K). Fig. 125.

Jungatur FDBM; sitque FH = FB: ducantúrque BE, KN ad AC parallelæ. Estque DNq. NKq [a] :: (FBq. BEq [b] :: HB. R [c] ::) HN × NB. NKq. [d] unde HN × NB = DNq. [e] item MF × FD = FBq. Ergo DNq + MF × FD [f] = (HN × NB + FBq. [g] =) FNq ergo DN = NM. [h] quare DK = KL. *Q. E. D.*

Coroll. FBq. BEq :: HN × NB. NKq.

a 4. & 22. 6.
b *cor.* 1. 2. *huj.*
c 21. 1. *hujus.*
d 9. 5.
e 37. 1. *hujus.*
f 2. *ax.* 1.
g 6. 2.
h *conv.* 6. 2.
k 2. 6.

Prop. XXXI.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ lineæ (AC, BC) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, B) linea (AB) producatur, per occursum vero (C) ducatur linea (CH) æquidistans asymptoto (EF); quæ sectionem, & lineam tactus conjungentem secet; linea (CH) inter occursum, & eam quæ tactus conjungit interjecta à sectione bifariam dividetur (in G). Fig. 126.

Not. E est centrum.

Ducantur rectæ CED, & tam EKMN & GX ad AB, quàm KF, GL ad CD parallelæ. Estque NL × LK. LGq [a] :: (EKq. KFq [b] ::) MLq. LGq. [c] unde NL × LK = MLq. [d] quare MLq + KEq = (NL × LK + KEq [e] = LEq [f] =) GXq. ergo cum GXq. MLq + KEq :: XCq. LGq + KFq; [h] erit XCq = (LGq + KFq =) [f] (EXq) [k] CE × ED. [l] ergo CX = XD; [m] adeoque CG = GH.

a *cor. præc.*
b 4. & 22. 6.
c 9. 5.
d 2. *ax.* 1.
e 6. 2.
f 34. 1. &c.
h 14. 5.
k 38. 1. *huj.*
l *conv.* 5. 2.
m 2. 6.

Prop. XXXII.

Fig. 227.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (A F, C E) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A C) producatur linea (A C); per contingentium verò occursum (C) ducatur linea (F K) tactus conjungenti (A C) æquidistans; & per punctum (H), quod conjungentem tactus (A C) bifariam secat, ducatur linea (H K) æquidistans asymptoton alteri (D E): quæ (H K) inter dictum punctum (H), & lineam æquidistantem (F K) incerjicitur, à sectione bifariam dividetur (in L).

Ducantur B E, L M ad A C parallelæ. Estque G M × M B. M Lq. [a] :: (D B q. B Eq [b] ::) H M q M Lq. [c] unde G M × M B = H Mq. [d] Item H D × D F = D Bq. [e] ergo H Mq + H D × D F = (DBq + GM × MB [f] =) DMq. [g] ergo FM = MH. [h] & propterea KL = LH.

Not. Fiat D Z = M H. Estque M D × D F + M H × DF [k] = H D × D F. [l] ideoque (addendo utrique ipsum M H q) M D × D F + M H × D F + M H q = (H D × D F + M H q [m] = D Mq [n] =) M D × D F + M D × F M. ergo (ablato communi M D × D F) MD × F M [o] = M H × D F + M Hq [p] = D Z × D F + D Z q [q] = FZ × Z D [r] = M D × F M. [s] quare F Z. F M :: M D. Z D. & componendo Z M. F M :: Z M. Z D. unde F M [t] = (Z D [v] =) H M.

a cor. 30. huj.
b 4 & 22. 6.
c 9. 5.
d 37. 1. hujus.
e 2. ax. 1.
f 6. 2.
g Not.
h 2. 6.
k 1. 2.
l 2. ax. 1.
m prius.
n 2. 2.
o 3. ax. 1.
p constr.
q 3. 2.
r 1. ax. 1.
s 16. 6.
t 9. 5.
u constr.

Prop. XXXIII.

Fig. 228.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (A G, D G), sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, D) linea (A D) producatur; per contingentium verò occursum (G) ducatur linea (C F) æquidistans tactus conjungenti (A D); & per punctum (L), quod conjungentem tactus (A D) bifariam secat, ducatur linea (L N) æquidistans asymptoton alteri (H K), conveniénsque cum sectione, & cum linea æquidistante (F C) per occursum (G) ducta: quæ (L N) inter dictum punctum (L) & lineam æquidistantem (F N) interjicitur, à sectione bifariam dividetur (in M).

Ducantur M P ad A D, & E K, M X ad G H parallelæ. Estque M Pq. P Lq [a] :: (H Eq. E Kq [b] :: E X × X B. X Mq [c] :: + H E q + E X × X B. E Kq + X Mq, (hoc est) :: [d] H Xq (vel P Mq) [e] G H × H L + X Mq (vel) ::) [f] P Mq. G H × H L + H Pq. ergo P Lq [g] = G H × H L + H Pq. [h] quare L P = P G. & [k] consequenter L M = M N.

a 4, & 22. 6.
b cor. 30. huj.
c 12. 5.
d 2. 6.
e 38. 1. huj.
f 34. 1. &c.
g 9. 5.
h conv. 5. 2.
k 2. 6.

Prop. XXXIV.

Si in una (D C) asymptoton (D C, D E) hyperbolæ, sumatur aliquod punctum (C), ab eoque recta linea (C E) sectionem contingat; & per tactum (B) ducatur æquidistans (F G) asymptoto (D C); quæ (C G) per dictum punctum (C) transit, alteri (D E) asymptoton æquidistans, à sectione bifariam dividetur (in A.) Fig. 229.

Ducantur AH ad CD, & BK ad DE parallelæ; éstque CB [a] = BE; [b] ideóque CK = KD. Item KB × KD [c] = CA × CD, [d] hoc est CG × CK = CA × CD. [e] quare CG. CA :: (CD. CK [f] ::) 2. 1. *Q. E. D.*

a 3. 2 *hujus.*
b 2, 6.
c 12. 2 *hujus.*
d *Sch.* 48. 1.
e 15. 6.
f *prius.*

Prop. XXXV.

Iisdem positis, si à sumpto puncto (C) ducatur recta linea (C F) sectionem secans in duobus punctis (A, F); erit ut tota (F C) ad eam (C A), quæ extra sumitur, ita inter sese portiones (F L, L A) illius (F A), quæ intra sectionem continetur. Fig. 230.

Ducantur C N X, K A V M, O P B R, Y F parallelæ ad D E; & A P S, T F R M X ad C D parallelæ. Estque A C [a] = F G; ac idcirco T G [b] = (K A [c] =) D S. & C K [b] = (T F [c] =) D Y. unde D K [d] = C Y. Item rectang H K. rectang K N [e] :: (D K. K C [f] :: C Y. K C [g] :: E C. C A [g] :: M K. K A :: [e] rectang M D. rectang A D (hoc est) [h] ::) rectang M D. rectang D B [k] (vel rectang O N) [l] :: rect. M D — rectang H K, rectang O N — rectang K N (hoc est) :: rect. M H. rectang K B :: [m] rectang M H. rect. A H (ob rectang K S [h] = rectang H O; & A B commune :: M V. V A [g] :: F L. L A [n] :: F C. C A. *Q. E. D.*

a 8. 2 *hujus.*
b 4. 6. & 14. 5.
c 34. 1.
d 2 *ax.* 1.
e 1. 6.
f 7. 5.
g 4. 6.
h 12. 2 *hujus.*
k 3. 2 *hujus.*
l 19. 5. (*et* 4. 6.
m 2 & 3. *ax.* 1.
n 11. 5.

Prop. XXXVI.

Iisdem positis, si à puncto (G) ducta linea (H G) neque sectionem in duobus punctis secet, neque æquidistans sit asymptoto (C E), sed cum opposita sectione conveniat (in A); erit ut tota (A K) ad lineam (K H), quæ inter sectionem (H), & æquidistantem (K L) per tactum (B) interjicitur; ita quæ (A G) est inter oppositam sectionem (A) & asymptoton (C G) ad eam (G H), quæ inter asymptoton (C G), & alteram sectionem (H). Fig. 231.

Ducantur.

a 1.6. Ducantur H M, A N ad C G parallelæ; & B X, G P, R H S N
b 4.6. parallelæ ad D E. Estque rectang N C. rectang C H [a]:: (N S. S H
c 7.5. ::[b] A G. G H [c]:: D H. G H. (ob A D = [d] G H) [b]:: C S. S G [a] :: rect
d 16.2. *hujus.* C R. rectang R G [e] :: rectang N C + rectang C R. rectang C H
e 12.6. [f] (vel rectang L X [g] vel rectang B G) + rectang R G (hoc est) ::
f 12.2 *hujus.* rectang. N L. rectang R X (hoc est [h]::) rectang N L. rectang L H
g 3.2 *hujus.* & 4.6. ::[a] N R. R H ::[b] A K. K H :: [k] A G. G H. *Q. E. D.*
h *Not.* & 7.5. *Not.* Rectang R X = rectang L H. ob rectang X H [l] = rectang.
k 11.5.
l 12.2 *hujus.* M B. & commune rectang B H.

Prop. XXXVII.

Fig. 232. 233. 234. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, vel sectiones oppositas, contingentes duæ rectæ lineæ (A C, B C) sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, B) producatur linea (A B); à contingentium vero occursu (C) ducatur linea (C F) sectionem secans in duobus punctis (D, F); erit ut tota (F C) ad eam (C D) quæ extra sumitur, ita portiones (F E, E D) inter sese, quæ a linea (A B) tactus conjungente fiunt.

Ducantur diametri C H, A K; & rectæ D P, F R ad A C parallelæ, & L F M, N D O parallelæ ad A B.

a 4. & 22.6. Estque triang L M C. triang X O C :: [a] L Mq. X Oq [a]:: L Cq
b 49 & 51.1. *huj. et* 2. *ax.* 1 C Xq [a]:: F Cq. C Dq [a]:: F Mq. D Oq [a]:: triang F R M. triang D P O
c 2. & 22.6. [a]:: triang L A K ([b] hoc est 4lat. L C R F). triang X A N ([b] hoc est
d 11.5. 4lat. X C P D) [a]:: L Aq. A Xq [c]:: F Eq. E Dq [d]:: F Cq. C Dq. [e] qua-
e 22.6. re F E. E D :: F C. C D. *Q. E. D.*

Coroll. L M. X O :: F E. E D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 235. 236. Iisdem positis, Si per contingentium occursum (C) ducatur recta linea (C O) æquidistans tactus conjungenti (A B); & per punctum (E), quod conjungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea (F O) secans, & sectionem ipsam in duobus punctis (F, D), & lineam æquidistantem (C O) per occursum ductam: erit ut tota (F O) ad eam (O D), quæ extra sumitur inter sectionem, & lineam æquidistantem; ita portiones (F E, E D) inter sese, quæ à linea (A B) tactus conjungente efficiuntur.

a *cor. præc.* Ducantur L F K M, D H G X N parallelæ ad A B, ac F R, G P
b 4.6. ad F C parallelæ. Estque F E. E D [a] :: L M. X H [b]:: L C. C X [c]:: F O.
c 2.6. d 11.5. O D [d] :: F E. E D. *Q. E. D.*

Prop. XXXIX.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (AD, BD) Fig. 237.
sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, B) linea (A B) producatur; à contingentium verò occursu (D) ducta linea (E G) & utramque sectionem (E, F) & lineam (A B) tactus conjungentem secet (in G): erit ut tota (E G) ad eam (F G), quæ extra sumitur inter sectionem & conjungentem tactus; ita portiones (E D, D F) inter sese, quæ inter sectiones (E, F), & contingentium occursum (D) interjiciuntur.

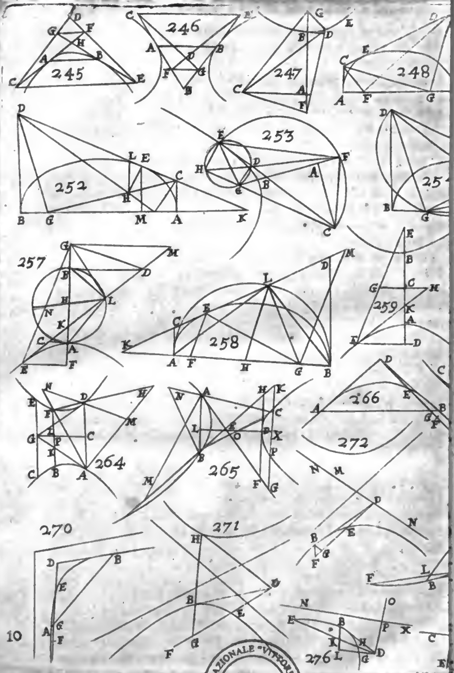
Per centrum C ducatur A C K; & fiant E H S K, F N M X O ad A B parallelæ, ac E P F R ad A B parallelæ. Estque E H. H D [a]:: F M. M D & H D. H S [a]:: M D. M X. unde ex æquo E H. H S :: a 4. 6.
F M. M X. [b] quare E Hq. F Mq [c] (id est triang. E H P. triang b 16.5. & 22. 6.
F M R) :: H Sq. M Xq [c] (hoc est triang D H S. D M X.) atqui triang E H P [d] = triang A S K + triang H D S. & triang F M R [d] = c 4. 6. & 22. 6.
triang. A X N + triang D M X. [e] quare triang H D S. triang DMX d 21. *hujus*.
([c] hoc est H Dq. D Mq [c] vel E Dq. D Fq) :: triang A S K. triang e 19. 5.
A X N [f] :: K Aq. A Nq. Est autem K A. A N :: E G. G F (Nam KA. f 22. 6.
A Q. [c]:: E G. G Q. & A Q. A N [c]:: G Q. G F; adeoque ex æ- g 11. 5.
quo K A. A N :: E G. G F). [g] ergo demum est E G. G F :: E D. D F.
Q. E. D.

Not. K A. A N :: E G. G F.

Prop. X L.

Iisdem positis, si per contingentium occursum (D) ducatur recta Fig. 238.
linea (F G) tactus conjungenti (A B) æquidistans; & à puncto (E), quod conjungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea (H L) secans utramque sectionem (in H, K) & æquidistantem (F G in L) ei, quæ tactus conjungit: erit ut tota (H L) ad eam (L K), quæ extra sumitur, inter æquidistantem, & sectionem, ita portiones (H E, E K) inter sese, quæ inter sectiones, & conjungentem tactus interjiciuntur.

Ducantur A C X T; & parallelæ H N M X, K O B ad A B; & a 11. *hujus*.
H R, K S ad A D. Estque triang H R N. [a] (triang X M A + tri- b 4 & 22. 6.
ang M N D). triang K S O [a] (triang A Y P + triang P O D) [b] :: [b] c 4. 6.
H Nq. K Oq :: M Aq. A Pq (nam H N. K O [c] :: H E. E K [d] :: X A. d 34. 1. & 7. 5.
A Y :: [c] M A. A P) [b] :: triang X M A. triang Y A P [e] :: triang M N D.
triang e 19. 5.



10

A F [b] :: A F. F L. unde (in hyperbole) KF. A F. [c] (KF + AF. AF + F L (hoc eſt) :: K A. A L. vel (in ellipſi) per converſam rationem, & permutando K F. A F (vel F B) :: K A. A L. [d] quare K B. (F B — K F. vel F B + K F) K F :: K L. (A L — K A vel A L + K A). K A. [e] hoc eſt B D. F H :: L E. A C. unde B D × A C [f] = (FH × L E [g] = F H × F M = [h] F Gq [k] =) ¼ T R [l] = B D × A C. *Q. E. D.*

b *cor.* 37. 1. *h.* c 12. 5. d *inverſè & converſè. vel componendo.* e 4. 6. f 16. 6. g 34. 1. h 38. 1. *huj.* k *cor. def. ad* 16 1. *hujus.* l 1. *ax.*

Prop. XLIII.

Si hyperbolen contingat recta linea (C H), abſcindet ex aſymptotis (D C, D E) ad ſectionis centrum (D) lineas (D C, D H) continentes rectangulum æquale ei, quod continetur lineis (D F, DG) abſciſſis ab altera contingente (F G), ad ſectionis verticem (B), qui eſt ad axem (B D). Fig. 244.

Ducantur A K, B L ad D G; & A M, B N ad C D parallelæ. Eſtque C H [a] = 2 A H; & ideò C D [b] = 2 AM. & D H [b] = 2 AK. unde C D × D H [c] = (4 AK × A M [d] =) 4 B L × B N. Simili diſcurſu 4 B L × B N = F D × D G. [e] unde C D × D H = F D × DG. *Q. E. D.*

a 3. 2 *hujus.* b 4. 6. c *Sch.* 48. 1. d 12. 2 *hujus.* e 1, *ax.* 1.

Non aliter argumentabimur, etſi D B non ſit axis, ſed alia quæpiam diameter.

Prop. XLIV.

Si quæ hyperbolen, vel oppoſitas ſectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (C F, E G) occurrant aſymptotis (D C, D E); quæ (C E, G F) ad occurſus ducuntur, lineæ (A B) tactus (A, B) conjungenti æquidiſtantes erunt. Fig. 245. 246.

Nam ob C D × D F [a] = E D × D G, [b] erit C D. E D :: D G. D F. [c] quare C E, G F parallelæ ſunt. ergo H G. G E :: H F. F C. item GE. GB :: [d] 2. 1 :: FC. C A. ergo ex æquo H G. G B :: H F. F A. inverſéque G B. H G :: F A. H F. & diviſè H B. H G :: H A. H F. [c] quare G F, & A B parallelæ ſunt. *Q. E. D.*

a 43. *hujus.* b 15. 6. c 6. 6. *&c.* d 3. 2. *hujus.*

Prop. XLV.

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, vel oppoſitis ſectionibus, ab extremo axis (A B) lineæ (A C, B D) ad rectos angulos ducantur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum (A F B, A G B) comparetur ad axem ex utraque parte; quod in hyperbola quidem, & ſectionibus oppoſitis excedat figurâ quadratâ, in ellipſi ve- Fig. 247. 248.

 rò

rò deficiat; & ducatur linea (E C) sectionem contingens, occurrénsque eis (A C, B D) quæ sunt ad rectos angulos; lineæ (CF, DG), quæ ab occursibus (C, D) ducuntur ad puncta (F, G) ex eo comparatione factâ, angulos rectos (C F D, D G C) ad ea (F, G) efficient.

a 42. hujus. Nam A C × B D [a] = ($\frac{1}{4}$ TR [b] =) A F × F B. unde A C. A F [c] ::
b hyp. F B. B D. item anguli C A F, F B D [b] recti sunt. [d] ergo ang. A C F
c 15. 6. = ang B F D. [d] & ang. A F C = ang. F D B. ergo cùm anguli
d 6. 6. A C F, A F C [e] conficiant unum rectum, etiam anguli B F D, A F C
e 32. 1. uni recto æquabuntur. unde (in ellipsi) reliquus D F C [f] rectus erit.
f 2 cor. 13. 1. Simili discursu angulus C G D rectus ostendetur.

Prop. XLVI.

Fig. 249. 250. Iisdem positis, lineæ conjunctæ æquales facient angulos (A C F, D C G, & C D F, B D G) ad contingentes (C D, B D).

a præc. et 31. 3. Circulus enim diametro D C descriptus [a] per puncta F, G transi-
b 21. 3. bit. unde ang. D C G [b] angulo D F G, [c] hoc est angulo A C F, æqua-
c in præced. tur. Similiter ang. C D F = ang. B D G. *Q. E. D.*

Prop. XLVII.

Fig. 251. 252. Iisdem positis, linea (H E) ab occursu (H) conjunctarum (C G, F D) perpendicularis est ad contingentem (C D).

Si negas, estò H L ad E C perpendicularis; & ordinatim applice-
a 46. hujus. tur E M (ad B D parallela). Atque ob ang. G D B [a] = (ang. C D F
b 15. 1. [b] =) ang. L D H. & [c] rectos D B G, D L H, erunt trigona G D B,
c hyp. D H L similia. quare B D. D L [d] :: (G D. D H [d] :: F C. C H (ob si-
d 4. 6. milia trigona G D H, F C H; nam anguli [e] C F H, D G H recti
e 45. hujus. sunt, & qui ad H æquales, vel communes) :: [d] A C. C L. (ob similia trigona C A F. C L H); nam & hic ang. A C F [a] = ang. L C H. & anguli F A C, C L H [c] recti sunt). ergo permutando D L. C L ::
f 4. 6. (B D. A C [f] :: B K. A K [g] :: B M. A M [h] ::) D E. E C. ergo inver-
g 36. 1. huj. sè C L. D L :: E C. D E. & divisè C D. D L :: C D. D E. quare
h 2. & 4. 6. D L [k] = D E. [l] *Q. E. A.* Ergo H E potiùs est perpendicularis ad
k 9. 5.
l 9. ax. 1. E C. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. XLVIII.

Iisdem positis, ostendendum est lineas (E F, E G), quæ à tactu ducuntur ad puncta (F, G) ex comparatione facta, æquales continere angulos (C E F, G E D) ad contingentem (C D). Fig. 253. 254.

Circulus enim diametro D H descriptus [a] transit per puncta E G [b](ob angulos D G H, DEH rectos) unde ang. D E G [c]= (ang DHG [d]= ang. C H F [c]=) ang. C E F.
a 31. 3. b 45. et 47. h. c 21. 3. d 15. 1.

Not. In hyperbole anguli D H G, C HF sunt idem angulus.

Prop. XLIX.

Iisdem positis, si à punctorum aliquo (G) ad contingentem (C D) agatur perpendicularis (G H), quæ à facto puncto (H) ducuntur ad axis extrema (A, B) angulos rectos (A H B) continebunt. Fig. 255. 256.

Nam (ob angulos D B G, D H G [a] rectos) circulus super diametro D G descriptus [b] transit per puncta B, H. unde ang. G H B [c] = ang. B D G [d]= ang A G C [e]= ang A H C [f]= ang G H B. ergo (addito communi angulo B H C, vel A H G) [g] erit ang. A H B = ang. C H G [h]= rect. *Q. E. D.*
a *hyp.* b 31. 3. c 21. 3. d 45. *hujus.* e *Not.* f 1. *ax.* 1. g 2 *ax.* 1. h *hyp.*

Not. ang. A G C = ang. A H C. Nam (ob [a]rectos angulos CAG, C H G) circulus, diametro C G descriptus, [b]per puncta A, H transibit, in quo anguli A G C, A H C eidem arcui A C insistent, & proinde [c]æquales erunt.

Prop. L.

Iisdem positis, si à sectionis centro (H) ducatur linea (H L) contingenti occurrens, æquidistánsque lineæ (F E) per tactum (E) & per unum (F) punctorum ductæ; erit (H L) æqualis dimidio (H B) axis (A B). Fig. 257. 258.

Jungantur EG, AL, LG, LB, ducatúrq; GM ad EF parallela. Estque (ob FH [a]= HG) EN [b]= N G; ideóq; E L [b] = LM. item (ob ang. DEG [c]= (ang C E F [d]=) ang E M G.) [e] Erit E G = G M. quare ang. G L E [f]= ang G L M. ergo G L ad E M est perpendicularis. [g] ergo ang A L B est rectus. [h] ergo circulus diametro A B descriptus transibit per L; & radius H L radio H A æquabitur. *Q. E. D.*
a *hyp.* b 2. 6. c 48. *hujus.* d 29. 1. e 6. 1. f 8. 1. g 49. *hujus.* h 31. 3.

Prop. LI.

Fig. 259. Si in hyperbola, vel oppositis sectionibus ad axem (A B) comparetur rectangulum (A D B, A E B) æquale quartæ parti figuræ, excedénsque figura quadrata; & à punctis (D, E) ex comparatione factis ad quamlibet sectionem inclinentur rectæ lineæ (D F, E F); major (E F) minorem (D F) quantitate axis (A B) superabit.

a 29. 1.
b 48. *hujus.*
c 6. 1.
d 2. 6.
e 4. 6.
f 50. *hujus.*
g 1. ax. 1.

Recta F K H tangat sectionem in F, & per centrum C ducatur G C H ad F D parallela. Estque ang. K H G [a] = (ang K F D [b] =) ang G F H. unde G H [c] = (G F [d] =) G E (ob C D = C E). Item F D [e] = 2 G C. & C H [f] = C B (ideóque 2 C H = A B). [g] ergo E F (hoc est 2 G H) = (2 G C + 2 C H =) F D + A B. *Q. E. D.*

Prop. LII.

Fig. 260. Si in ellipsi ad majorem axem (A B) ex utraque parte comparetur rectangulum (A C B, A D B) æquale quartæ parti figuræ, deficiénsq; figurâ quadratâ; & à punctis (C, D) ex comparatione factis ad sectionem inclinentur rectæ lineæ (C E, D E), ipsi axi (A B) æquales erunt.

a 48. *hujus.*
b 29. 1.
c 6. 1.
d 2. 6.
e *hyp.*
g 1. ax. 1.
h 4.
k 50. *hujus.*

Recta F E H tangat sectionem, & per centrum G ducatur G K H ad C E parallela. Estque ang H E K [a] = (ang F E C [b] =) ang E H G. unde K H [c] = (K E [d] =) K D (ob G C [e] = G D). [g] ergo C E [h] (2 G K) + E D (2 K H) = 2 G H. [k] = 2 A G [e] = A B [g] = C E + E D.

Prop. LIII.

Fig. 261. 262. Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus ab extremo diametri (A C) ducantur lineæ (A D, C E) ordinatim applicatis æquidistantes; & à dictis terminis (A, C) ad idem sectionis punctum (B) ductæ lineæ (A B, C B) secent æquidistantes (A D, C E); rectangulum ex abscissis (A D, C E) factum, æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum (A C) constituitur.

a 4. 6.
b 23. 6.
c 21. 1. *huj.*
d 1. 6.
e 11. 5.
f 9. 5.

Ordinatim applicetur B F. Estque A F. F B [a] (hoc est A. C. C E) + C F. F B [a] (hoc est A C. A D) [b] = A F × C F. F Bq [c] :: T. R. [d] :: Tq. (A Cq). T R [e] = A C. C E + A C. A D [b] = A Cq. C E × A D. [f] ergo C E × A D = T R. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. LIV.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (A D, C D) sibi ipsis occurrant; & per tactus (C, A) ducantur contingentibus æquidistantes (C G, A F); à tactibus verò ad idem sectionis punctum (H) ductæ lineæ (A H, C H) æquidistantes secent (in G, & F); rectangulum constans ex abscissis (A F, C G) ad quadratum lineæ (A C) tactus conjungentis, proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis (E B) lineæ (D E) ab occursu (D) contingentium ad punctum (E) medium conjungentis tactus ductæ, quæ est intra sectionem ad quadratum reliquæ (B D), & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus (A D, C D) factum, ad quartam partem quadrati lineæ (AC) tactus conjungentis. Fig. 263.

Per H, B ducantur K H O X L, M B N ad A C parallelæ. Liquet M N sectionem [a] tangere, & fore M B [b] = B N & K O [b] = O L. (nam A E [c] = E C) item H O [d] = O X; [e] quare H K = X L. & [f] X K = L H. Hinc A Mq. M B × B N (M Bq) [g] :: A Kq. X K × K H (L H × K H). & permutando A Mq. A Kq :: M B × B N. L H × K H. [h] item N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq. ergo ex æquali N C × A M. M B × B N :: L C × A K. L H × K H [l] = L C. L H [m] (F A. A C) + A K. K H. [m] (G C. A C) [l] = F A × G C. A Cq [n] :: N C × A M. M B × B N [o] = N C × A M. N D × D M [p] (E Bq. B Dq) + N D × D M. M B × B N [q] (C D × D A. A E × E C) [n] ergo F A × G C. A Cq = E Bq. B Dq + C D × D A. A E × E C. *Q. E. D.*

a 32. 1.
b ex. 4. 6.
c hyp.
d 46, & 47 1. hujus.
e 3. ax. 1.
f 2. ax. 1.
g 16. hujus.
h Not. 1.
l 23. 6.
m 4. 6.
n 11. 5.
o 5. def. 6.
p Not. 2.
q Not. 3.

Not. 1. N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq. Nam (propter parallelas A C, K L, M N) est A M. A K [a] :: N C. L C. & permutando A M. N C :: A K. L C. [b] hoc est A Mq. A M × N C :: A Kq. A K × L C. & inversè. a 2. 6. b 1. 6.

Not. 2. N C × A M. N D × D M :: E Bq. B Dq. Nam A M × C N. N D × D M [c] = (A M. D M [d] (E B. B D) + C N. N D [d] (E B. B D) = E B. B D + E B. B D [d] =) E Bq. B Dq. c 23. 6. d 2. 6.

Not. 3. N D × D M. M B × B N :: C D × D A. A E × E C. Nam N D × D M. M B × B N [e] = (N D. B N [f] (hoc est C D. E C) + D M. M B [f] (hoc est D A. A E) = C D. E C + D A. A E [e] =) C D × D A. E C × A E. e 23. 6. f 4. 6.

Prop.

Prop. LV.

Fig. 264. Si quæ oppositas sectiones contingunt, rectæ lineæ (A G, DG) sibi ipsis occurrant; & per occursum (G) ducatur linea (C E) conjungenti tactus (A D) æquidistans; per tactus verò ducantur contingentibus æquidistantes (A M, D M); & à tactibus ad idem alterius sectionis punctum (F) ducantur lineæ (A F, F A), quæ secent æquidistantes (DM, A M), rectangulum constans ex abscissis (A H, D N) ad quadratum lineæ (A D) tactus conjungentis, eandem proportionem habebit, quam rectangulum ex contingentibus (AG, D G) tactum ad quadratum lineæ (C G) ab occursu (G) ad sectionem ducta, quæ quidem (C G) conjungenti tactus (D A) æquidistet.

* Not. 1. Per F ducatur F L K B ad A D parallela. Estque EGq. *(vel CGq)
a 20. hujus. G Dq[a] :: B L × L F *(vel K F × L F). L Dq. item G Dq. G D ×
b Not. 2. G A :: L Dq. L D × A K. ex æquali igitur C Gq. G D × G A :: K F
c 23. 6. × L F. L D × A K[c] = K F. A K[d] (A D. D N) + L F. L D[d] (A D.
d 4. 6. A H) = A D. D N + A D. A H[d] = A Dq. D N × A H. ac inverse G D × G A. C Gq :: D N × A H. A Dq. *Q. E. D.*

Not. 1. E G = C G. & L F = K B, vel K F = L B. Nam bi-
e 38. 2 hujus. sectâ A D in O,[e] erit G O recta diameter, cui conjugata quæ ad A D
f ex. 4. 6. parallela. ergo C G = G E. & B P = P F. [f] item K P = P L. [g] er-
g 3. ax. 1. go K B = L F &c.

Not. 2. G Dq. G D × G A :: L Dq. L D × A K. Nam propter
h 4. 6 & converse. parallelas A D, K L, erit G D. L D[h] :: G A. K A. & permutando G D. G A.[k] (hoc est G Dq. G D × G A) :: L D. K A[k] (hoc est) :: L Dq.
k 1. 6. L D × K A.

Prop. LVI.

Fig. 265. Si quæ unam oppositarum sectionum contingunt, rectæ lineæ (AE, B E) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, B) ducantur contingentibus æquidistantes (B N, A M); à tactibus verò ad idem alterius sectionis punctum (C) ducantur lineæ (A C, BC), quæ æquidistantes (B N, A M) secent (in N, M): rectangulum constans ex abscissis (BN, A M) ad quadratum lineæ (A B) tactus conjungentis proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis (L D) lineæ, ad punctum L medium conjungentis tactus (A B) ductæ, quæ est inter dictum punctum (L), & alteram sectionem (D) ad qua-

quadratum ejus (DE), quæ inter sectionem (D), & occursum (E) interjicitur; & ex proportione, quam habet rectangulum, ex contingentibus (AE, BE) factum ad quartam partem quadrati lineæ (AB) tactus conjungentis.

Ducantur CGK, DHF ad AB parallelæ. Estque BHq. HDq [a] Not. 1.
[a](HD × DF) [b] :: BKq. PK × KC [a] (CG × KC). item FA × BH. [b] 18. hujus.
BHq [c] :: GA × BK. BKq. ergo ex æquali FA × BH. HD × DF [c] Not. 2.
:: GA × BK. CG × KC. atqui FA × BH. HD × DF [d] = FA × [d] 5. def. 6.
BH. HE × EF [e] (LDq. DEq) + HE × EF. HD × DF [f] (AE × [e] Not. 3.
EB. AL × LB). [g] ergo LDq × DEq + AE × EB. AL × LB = [f] Not. 4.
GA × BK. CG × KC [h] = BK. KC [k] (AM. AB) + GA. CG [g] 11. 5.
[k] (NB. AB) = AM. AB + NB. AB [h] = AM × NB. ABq [g] = [h] 23. 6.
LDq. DEq + AE × EB. AL × LB. *Q. E. D.* [k] 4. 6.

Not. 1. HD = DF. & PK = CG. Nam ob AL [l] = LB [l] *hyp.*
[m] est HD = DF. [m] & KX = XG. item XC [n] = XP. [o] ergo PK = [m] *ex.* 4. 6.
CG. [n] 47. 1. *huj.*
[o] 2. *ax.* 1.

Not. 2. FA × BH. BHq :: GA × BK. BKq. Nam propter parallelas BA, FH, GK, [p] erit FA. AG :: HB. BK. & permutando FA. HB [q] (hoc est FA × HB. HBq) :: AG. BK (hoc est AG × BK. BKq). [p] *ex.* 2. *vel* 4. 6. [q] 1. 6.

Not. 3. FA × BH. HE × EF :: LDq. DEq. Nam FA × BH. HE × EF [r] = FA. EF [s] (LD. DE) + BH. HE [s] (LD. DE) = LD. DE + LD. DE [r] = LDq. DEq. [r] 23. 6. [s] *ex.* 4. 6.

Not. 4. HE × EF. HD × DF :: AE × EB. AL × LB. Nam HE × EF. HD × DF [t] = HE. HD [v] (EB. BL) + EF. DF [u] (EA. AL) = EB. BL + EA. AL [t] = EB × EA. BL × AL. [t] 23. 6. [u] 4. 6.

APOL-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. IV.

Prop. I.

Fig. 166. SI in coni sectione, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum (D) extrà; atque ab eo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D C); una quidem (D B) contingens, altera verò (DC) in duobus punctis (E, C) secans; & quam proportionem habet tota linea secans (C D) ad partem sui ipsius (D C), quæ extra sumitur, inter punctum (D) & sectionem interjecta; in eandem dividatur, quæ (C E) est intra, ita ut rectæ lineæ ejusdem rationis ad unum punctum conveniant (C D. D E :: C F. F E); quæ à tactu (B) ad divisionem (F) ducitur, occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum (D) extra sumptum, sectionem continget.

Est quasi conversa 37æ 3ii.

a 49. 2. huj. b 37. 3. hujus. c hyp. d 9. 5.

Ex D [a] ducatur tangens D A, & connectatur A B, secans D C in G. ergo C G. G E [b]:: (C D. D E [c] ::) C F. F E. ergo componendo C E. G E [d] :: C E. F E. ergo G E = F E. ergo puncta G, F coincidunt. *Q.E.D.*

Coroll. B A secat D C in F.

Prop. II.

Hæc quidem communiter in omnibus sectionibus demonstrata sunt; at in sola hyperbola si linea D B sectionem contingat, & D C in punctis E, C secet, puncta verò E, C contineant tactum ad B, & punctum D sit extra angulum asymptotis comprehensum, similiter fiet de-

demonstratio. * Possumus enim à puncto D aliam ducere contingentem D A & quæ reliquæ sunt ad demonstrationem, perficere. * *49. 2. huj.*

Prop. III.

Iisdem existentibus puncta E, C punctum B non contineant, sitque punctum D intra angulum asymptotis comprehensum, poterimus à puncto D alteram contingentem ducere, quæ sit D A, & reliqua similiter demonstrare. Fig. 267.

Prop. IV.

Iisdem positis, si occursus E, C contineant tactum ad B; & punctum D sit in angulo (L X N), qui deinceps est angulo (K X N) asymptotis (K L, M N) comprehenso; linea quæ à tactu (B) ad divisionem (F) ducitur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursu ducitur eandem sectionem continget. Fig. 268.

Ex D [a] ducatur DH tangens oppositam sectionem, & connectatur HB, secans C E in G. [b] ergo C G. G E :: (C D. D E [c] ::) C F. F E. & componendo C E. GE :: C E. F E. [d] ergo puncta G, F coincidunt. *Q.E.D.* a *49. 2. huj.* b *37. 3. huj.* c *hyp.* d *9. 5.*

Coroll. H B secat D C in F.

Prop. V.

Iisdem positis, si punctum D sit in una (X N) asymptoton; quæ à puncto B ad F ducitur, eidem asymptoto (X N) æquidistabit. Fig. 269.

Nam per B ductâ B G ad X N parallelâ, erit rursus C G. G E [a] :: (C D. D E [b] ::) C F. F E. ergo componendo, C E. G E :: C E. F E. [c] unde G, & F coincidunt. a *35. 3. huj.* b *hyp.* c *9. 5.*

Prop. VI.

Si in hyperbola extra sumatur aliquod punctum (D), à quo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D F); altera quidem (D B) contingens, altera vero (D F) æquidistans uni asymptototon; & æquidistantis portio (E D) inter sectionem & punctum (D) interjecta, æqualis sit ei (E F), quæ intra sectionem continetur: linea, quæ à tactu (B) ducitur ad factum punctum (F), occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum extra sumptum (D) sectionem continget. Fig. 270.

N Pona-

a 49.2. *bujus.* b 30.3. *bujus.* c *hyp.* Ponatur D intra angulum asymptotis comprehensum; ex D [a] ducatur tangens D A, conjungatur B A, secans D F in G. ergo E G [b] = E D [c] = E F, quare puncta E, F coincidunt. *Q. E. D.*

Coroll. A B secat D E in F.

Prop. VII.

Fig. 271. Iisdem positis, sit punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur. Dico etiam sic eadem evenire.

a 31.3. *buj.* b *hypoth.* Iterum, ex D ducatur tangens D H, & connectatur H B secans DF in G. ergo E G [a] = E D [b] = E F. ergo non differunt puncta F, G. *Q. E. D.*

Prop. VIII.

Fig. 272. Iisdem positis, sit punctum D in asymptoton unâ (M N), & reliqua eadem fiant: dico lineam, quæ à tactu (B) ad extremam partem (F) sumptæ (D F) ducitur, æquidistantem esse asymptoto (M N), in qua est punctum D.

a 34.3. *buj.* b *hyp.* Nam ducatur B G ad M N parallela, ergo rursus E G [a] = (E D) [b] = E F. & puncta G, F coincidunt. *Q. E. D.*

Prop. IX.

Fig. 273. Si ab eodem puncto (D) ducantur duæ rectæ lineæ (D E, D F), quarum utraque coni sectionem, vel circuli circumferentiam in duobus punctis secet; & quam proportionem habent totæ lineæ (E D, F D) ad portiones (D H, D G), quæ extra sumuntur, in eam dividantur, quæ sunt intra (E H, F G); ita ut partes ejudem rationis ad idem punctum conveniant (E D. D H :: E K. K H. & F D. D G :: F L. L G), quæ per divisiones (L, K) ducitur linea, sectioni in duobus punctis occurret; & quam ab occursu ad punctum (D) extra sumptum ducuntur, sectionem contingent.

a 49. 2. *buj.* b *cor.*1. 4. *b.* A puncto D [a] ducantur contingentes D A, D B; & conjungatur A B. hæc [b] secat D E in K; [b] & D F in L. unde liquet propositum.

Prop.

Prop. X.

Hæc quidem communiter in omnibus, at in sola hyperbola, si alia quidem eadem sint, unius autem rectæ lineæ occursus contineant occursus alterius; & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum, eadem prorsus evenient, quæ dicta sunt, ut in secundo theoremate tradidimus.

Prop. XI.

Iisdem positis, si unius lineæ occursus occursus alterius non contineant, & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum, & figura, & demonstratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

Prop. XII.

Iisdem positis, si unius lineæ (D F) occursus (F, G) alterius (D E) occursus (E, H) contineant; & sumptum punctum (D) sit in angulo (P R X) deinceps ei, qui asymptotis (P O, N X) comprehenditur; linea per divisiones (K L) ducta, si producatur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum D, oppositas sectiones contingent. Fig. 274.

Ex D ducantur contingentes D M, D S; & connectatur M S: hæc [a] secat ipsam D E in K, ipsamque D F in L. unde liquet propositum. a cor. 4. 4. huj.

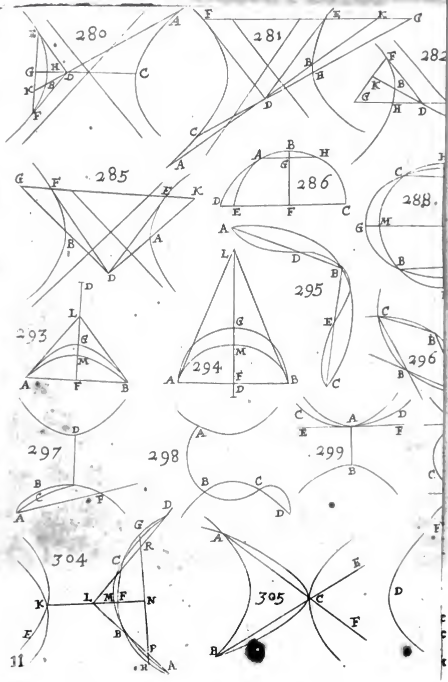
Prop. XIII.

Iisdem positis, si punctum D sit in una asymptoton, & reliqua eadem existant, quæ per divisiones (K L) transit linea, asymptoto (OP) in qua est punctum, æquidistabit; & producta occurret sectioni; quæ vero ab occursu ad punctum (D) ducitur, sectionem continget. Fig. 275.

Itidem liquet ex 5[a] hujus.

Prop. XIV.

Iisdem positis, si punctum D sit in una (P O) asymptoton; & linea quidem D E sectionem in duobus punctis secet; D G verò alteri asymptoto (N X) æquidistans, secet in uno tantùm, quod sit G; fiatq; ut E D ad D H, ita E K ad K H; & ipsi D G ponatur æqualis G L; quæ per puncta K, L transit linea & asymptoto (O P) æquidistabit, Fig. 276.



11

Sit F G asymptoto parallela. ergo rursus A G. G B a:: (AD. DB b::) A C. C B. & dividendo A B. G B :: A B. C B. ergo G, & C sunt idem punctum. c *Q. E. D.* a 36. 3 *huj.* b *hyp.* c *ut in prae.*

Prop. XVIII.

Si in sectionibus oppositis sumatur aliquod punctum (D) inter duas sectiones, & ab ipso ducantur duae lineae (A B, C H), utramque sectionem secantes; &. quam proportionem habent interjectae (A D, C D) inter unam sectionem, & punctum (D) ad eas, (D B, D H), quae inter idem punctum (D) & alteram sectionem interjiciuntur, eandem habent lineae (A K, C G) majores iis (A B, C H), quae sunt inter sectiones oppositas, ad excessus ipsarum (K B, G H); quae per terminos (K, G) majorum linearum transeunt, occurrent sectionibus; & quae ab occursibus ad sumptum punctum (D) ducuntur, sectiones contingent. Ponatur D inter asymptotos. Fig. 280.

Per D a ducantur contingentes D E, D F, & connectatur E F; secat haec b ipsum A B in K, b ipsamque C H in G. ergo liquet propositum. a 49. 2 *huj.* b 15. 4. *huj.*

Prop. XIX.

Sumatur punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur, ducanturque rectae lineae (A B, C H) sectiones secantes, & ut dictum est dividantur (in K, G): dico eam, quae per K G producitur, occurrere utrique sectionum, & quae ab occursibus ducuntur ad D, sectiones contingere. Fig 281

Rursus enim per D a ducantur contingentes D E, D F, b secabit juncta F E ipsam A B in K, ipsamque C H in G. unde constat propositum. a 49. 2. *huj.* b 16. 4. *huj.*

Prop. XX.

Si sumptum punctum (D) sit in una asymptoton, & reliqua eadem fiant; linea (KG), quae transit per terminos (K,G) excessuum, asymptoto, in qua est punctum (D) aequidistabit; & quae a puncto (D) ducitur ad occursum sectionis, & lineae (K G) per terminos transeuntis, sectionem continget. Fig. 282.

Nam pariter a ducta tangente D F, ducta per tactum F ad asymptoton parallela b secabit A B in K, & C H in G. ergo res constat. a 49. 2 *huj.* b 17. *huj.*

Prop.

Prop. XXI.

Fig. 283. Sint rursus oppositæ sectiones A, B, sitque punctum D in una asymptoton, & linea quidem D B K in uno tantùm puncto occurrat sectioni B, alteri asymptoto æquidistans, linea verò C D H G utrique sectioni occurrat; & ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipsi D B æqualis sit B K. Dico lineam, quæ per puncta K, G transit, occurrere sectioni, asymptotóque, in qua & punctum D, æquidistare; & quæ ab occursu ad punctum D ducitur, sectionem contingere.

a 6. 4. *hujus.* b 15. *hujus.* Ductâ enim tangente D F, & F G parallelâ asymptoto (in qua D); secabit F G [a] ipsam D B in K, [b] ipsámque C H in G. unde constat.

Prop. XXII.

Fig. 284. Sint similiter oppositæ sectiones, asymptotique, & punctum D sumatur in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur; linea verò C D H secet utrasque sectiones, & D B alteri asymptoto æquidistat; sitque ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipsi D B æqualis ponatur D K: dico lineam quæ per puncta K, G transit, occurrere utrique oppositarum sectionum; & quæ ab occursibus ducuntur ad D sectiones easdem contingere.

Itidem patet ut in 6ta, & 16ta hujus libri.

Prop. XXIII.

Fig. 285. Sint itidem oppositæ sectiones A B; punctúmque D sit in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur; & linea quidem B D sectionem B in uno puncto tantùm secet, alteri asymptoto æquidistans; linea verò D A similiter secet sectionem A, sitque D B ipsi B G æqualis, & D A ipsi A K; dico lineam, quæ transit per K G occurrere sectionibus; & quæ ab occursibus ad D ducuntur, sectiones contingere.

Patet ut in sexta.

Prop. XXIV.

Fig. 286. Coni sectio (D A B C) coni sectioni vel circuli circumferentiæ (E A B C) non occurrit, ita ut pars quidem eadem sit, pars verò non communis.

Si

Si affirmas, in parte communi ABC sumatur punctum H utcunque, & connectatur A H; & huic parallela ducatur D C; ipsámque A H bisecet diameter B G F. Itaque (ob sectionem E B C) [a] erit E F = F C. & (propter sectionem D B C) D F [a] = F C. [b] proinde E F = D F. *Q. E. A.* a 46. & 47. 1. b 1 ax. (huj.

Prop. XXV.

Coni sectio coni sectionem, vel circuli circumferentiam in pluribus punctis, quàm quatuor non secat. Fig. 287.

Si fieri potest, secet quinque punctis A, B, C, D, E proximis: conjungantur rectæ A B, D C, quæ primò occurrant, (ut semper [a] fit in parabola & hyperbola) in L. [b] fiátque A L. L B :: A O. O B. [b] & D L. L C :: D P. P C. jungatúrque O P, sectionibus occurrens punctis R, H. [c] ergo ductæ L R. L H sectiones contingent: ducatur E L, sectionibus occurrens in M, G. erítque E N. N M ([d] :: E L. L M) [e] ⊏ (E L. L G [d] ::) E N. N G. [f] unde N M ⊐ N G. [g] *Q. E. A.* a 24. & 25. 2. hujus. b 10. 6. c 9. 4 hujus. d 37. 3 h. e 8. 9. f 10. 5.

Sin parallelæ sint A B, D C (ut fieri potest in ellipsi & circulo), bisecentur ipsæ in O, & P; & connexa O P sectionibus occurrat in R, H. [h] quare R H est diameter, ad quam ordinatim applicantur A B, D C; eísque parallela E G (per E ducta). [k] unde erit utraque E G, E M bisecta in N. ac propterea N G = N M. *Q. E. A.* g 9. ax. Fig 288. h 28. 1. huj. k 10. def. 1. h. l 9. ax.

Prop. XXVI.

Si dictarum linearum aliquæ in uno puncto (A) sese contingant, non occurrant sibi ipsis ad alia puncta plura quàm duo. Fig. 289.

Si fieri potest, occurrant tribus punctis B, C, D proximè sitis; [a] ducatúrque tangens A L, occurrens ductæ B C in L; [b] fiat autem B L. C L :: B P. P C; & connexa A P sectionibus occurrat in H, & R. [c] ergo ductæ L H, L R contingent sectiones: itaque ducta D L, absurditatem incurremus, pariter ac in præcedenti. Sin B C, A L non conveniant, (in ellipsi nempe, & circulo) similiter consequetur absurdum. a 49. 2. huj. b 10. 6. c 9 hujus.

Prop. XXVII.

Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis (A, B) sese contingant, in alio puncto sibi ipsis non occurrent. Fig. 290. 291. 292.

Occurrant, si fieri potest, in C; primò extra contactus.

Du-

Ducantur tangentes A L, B L, quæ si occurrant in L, ductâ C L, a 27. 2 hujus. incurritur absurditas, ut in 25ma. Sin tangentes parallelæ sint, [a] erit b 10.def. 1. h. quoque A B utriusque sectionis diameter, ac [b] idcirco N M [b] = (NC c 9. ax. [b] =) N G. [c] Q. E. A.

Sin punctum C sit intra contactus, rursus ducantur tangentes A L, d 29. 2. huj. B L, & connexa A B bisecetur in F, [d] eritque F L diameter; unde si ducatur C G M ad A B parallela, [b] erit utraque C G, C M bisecta in K; unde K G = K M. [c] Q. E. A.

Prop. XXVIII.

Fig. 293. Parabole (A G B) parabolen (A M B) non contingit, præterquam in uno puncto.

Si fieri potest, contingant se parabolæ punctis (A, B), à quibus ducantur tangentes A L, B L, concurrentes in L. junctámque A B bia 29. 2 huj. secet recta L F. [a] hæc diameter erit utriusque sectionis; [b] unde L F b 35. 1 huj. bisecta est in G, & M. [c] Q. E. A. c 9. ax.

Prop. XXIX.

Fig. 293. Parabole (A G B) hyperbolen (A M B) non contingit in duobus punctis, extra ipsam cadens.

Tangat, si fieri potest, punctis A, B, à quibus ducantur tangentes a 29. 2 huj. A L, B L; junctámque A B bisecet recta L F; [a] hæc utriusque secti- b 37. 1. huj. onis erit diameter. Sit D centrum hyperbolæ; erítque F D. D M [b]:: c 19. 5. (D M. D L [c]::) F M. M L. quare, cùm F D ⊏ D M, [d] erit F M d 14. 5. ⊏ M L. ergo F M ⊏ G L. atqui F G [e] = G L. ergo F M ⊏ F G. e 35. 1. huj. [f] Q. E. A. f 9. ax.

Prop. XXX.

Fig. 293. Parabola (A M B) ellipsim vel circuli circumferentiam (A G B) non contingit in duobus punctis (A, B) intra ipsam cadens.

a 37. 1 huj. Si affirmas, ducantur tangentes A L, B L. & rectam A B iterum b 19. 5. bisecet diameter F G, in qua sit D centrum ellipsis, vel circuli Estque c 14. 5. L D. D G [a]:: (D G. D F [b]::) L G. G F. [c] ergo L G ⊏ G F. atqui F G d 9. ax. = G L. quæ [d] repugnant.

Prop.

Prop. XXXI.

Hyperbole (A G B) hyperbolen (A M B), idem centrum (D) habens, in duobus punctis (A, B) non continget. Fig. 293.

Si dicas contingere, ducantur contingentes A L, B L; & juncta DL producatur: [a]bisecabit utique hæc tactus conjungentem A B, in F; estque (propter hyperbolen A G B) DGq [b]$= FD \times DL$. & (ob hyperbolen A M B) DMq [b]$= FD \times DL$. [c]quare $DGq = DMq$. [d]*Q. E. A.*

a 30. 2. *huj.*
b 37. 1. *h.*
c 1. *ax.*
d 9. *ax.*

Prop. XXXII.

Si ellipsis (A M B) ellipsin, vel circuli circumferentiam, (A G B), habens idem centrum (D), in duobus punctis (A, B) contingat, linea (A B) conjungens tactus, per centrum (D) transibit. Fig. 294.

Nam ductis contingentibus A L, B L, siquidem A B per centrum [a]non transit, [b]hæ convenient, puta in L. eritque juncta L D [c]diameter utriusque sectionis; & proinde in una, DGq [d]$= DL \times LF$; in altera, DMq [d]$= DL \times LF$. [e]unde $DGq = DMq$. [f]*Q. E. A.*

a *hyp.*
b 27. 2 *huj.*
c *cor.* 51. 1. *h.*
d 37. 1 *huj.*
e 1. *ax.*
f 9. *ax.*

Prop. XXXIII.

Coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) coni sectioni, vel circuli circumferentiæ (A D B E C), quæ non ad easdem partes connexa habeat, ad plura puncta quàm duo non occurret. Fig. 295. 296.

Si fieri potest, occurrant tribus punctis A, B, C, liquétque rectas A B, C B continere angulum, ad partes in quibus sunt concava lineæ (A B C). paritérque eædem angulum continent ad partes, in quibus concava lineæ A D B E C. ergo lineæ A B C, A D B E C concava habent ad easdem partes, contra hypothesin.

Prop. XXXIV.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia (ABF) occurrat uni (ACF) oppositarum sectionum in duobus punctis (A, F); & lineæ (A B F, A C F) quæ inter occursum interjiciuntur ad easdem partes concava habeant; producta linea (A B F) ad occursus, alteri (D) oppositarum sectionum non occurret. Fig. 297.

O Nam

a 33. 2 *huj.* Nam recta A F sectioni D [a] non occurret, ergo nec sectio A B F.

Prop. XXXV.

Fig. 298. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) occurrat uni (A) oppositarum sectionum (A, B); non occurret ipsarum reliquæ (B) ad plura puncta, quàm duo (B, C).

Nam ut occurrat pluribus, repugnat 33æ hujus.

Prop. XXXVI.

Coni sectio, vel circuli circumferentia oppositis sectionibus ad plura puncta, quam quatuor non occurret.

a 35. 4. *huj.* Etenim si uni occurrat, reliquæ ad plura puncta [a] non occurret, quàm duo.

Prop. XXXVII.

Fig. 299. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (C A D) unam oppositarum sectionum (A) concavâ sui parte contingat, alteri oppositarum (B) non occurret.

a 49. 1. b *cor.* 32. 1. *h.* c 33. 2. *h.*

Per contactum A [a] ducatur recta E F tangens, [b] utramque sectionem. [c] hæc sectioni B non occurret, ergo nec linea C A D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 300. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) utramque oppositarum sectionum (A, B) contingat in uno puncto (A & B); oppositis sectionibus in alio puncto non occurret.

a *cor.* 32. 1. *h.* b 33. 2. Ducantur rectæ A D, B E contingentes sectiones A, B; [a] hæ lineam A B C etiam contingunt. [b] ergo (inclusa his) linea A B C non occurret sectionibus A, B.

Prop. XXXIX.

Fig. 301. Si hyperbole (A B C) oppositarum sectionum uni (A B D) in duobus punctis occurrat, convexa habens è regione sita, quæ ipsi (A B C) opponitur sectio (E), oppositarum alteri (F) non occurret.

Con-

Conjungatur A B; [a] hæc neutri sectionum E, F occurret. ergo nec ipsæ E, F (quibus illa interjacet) sibi occurrent. a 33. 2 huj.

Prop. XL.

Si hyperbole (A C B) utrique oppositarum sectionum (A, B) occurrat; quæ ipsi opponitur sectio, nulli oppositarum in duobus punctis occurret. Fig. 302.

Si fieri potest, occurrat sectioni A punctis D, E. [a] ergo recta D E neutri sectionum C, B occurret. Quare nec ipsæ sectiones C, B convenient, contra hypothesin. a 33. 2 huj.

Similiter, sectio E non continget utramque A, B. Nam ducta tangens H E [a] neutri C, B occurret; ergo nec ipsæ, itidem contra hypoth.

Prop. X L I.

Si hyperbola (C A B D) utramque oppositarum sectionum (A, B) duobus punctis (C, A; D, B) secet, convexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio (E F) nulli oppositarum (A, B) occurret. Fig. 303.

Sint K G L, M N G asymptoti sectionum A B, E F. liquet rectam C A [a] occurrere asymptoto L G ad partes K, (non ad L); & rectam D B ad partes M, (non ad partes N,) [a] occurrere asymptoto N G, adeóque [b] angulum P H R continere angulum N G L, & propterea sectionem E F. Atqui C A [c] non occurrit sectioni D B O, nec D B sectioni C A X. ergo rectæ G A R, D B P sectionibus C A X, & E F; sectionibúsque D B O, & E F interjacent; & proinde sectio E F neutri C A X, D B O occurret. *Q. E. D.*

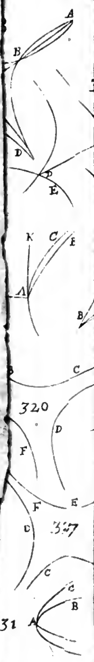
a 8. 2 huj.
b 25. 2 huj.
c 33. 2 huj.

Prop. X L I I.

Si hyperbole unam oppositarum sectionum in quatuor punctis (A, B, C, D) secet, quæ ipsi opponitur sectio (K), non occurret alteri oppositarum (E). Fig. 304.

Occurrat, si fieri potest, in K; junctæque A B, D C [a] conveniant productæ in L; & [b] fiat A L. L B :: A P. P B. & D L. L C :: D R. R C. [c] ergo connexa P R sectionibus occurret, [c] & quæ ab L ad occursus ducuntur, sectiones contingent; [d] eritque proinde (ob sectionem A F D) F L. N L :: N K. K L; [d] & (propter sectionem A M D) N F. F L :: N M. M L. [e] quare N K. K L :: N M. M L. *Q. E. A.*

a 25. 2 huj.
b 10. 6.
c 9. huj.
d 36. 1. huj. & 16. 5.
e 11. 5.



B)
;
p-
&
C;
um
ipsi
ano
E;
GH
ro-
A.
ral-
H,
se-
ad
b::
R
D)
quæ
rret.
urrat
ergo
n oc-
pug-
Prop.

Prop. XLVI.

Si hyperbole (A G C) unam (A B C) oppositarum sectionum (A B C, D) in uno puncto (A) contingat, & secet in duobus punctis (B, C), quæ ipsi opponitur sectio (E) alteri oppositarum (D) non occurret. Fig. 309.

Si fieri potest, occurrat in D; jungatúrque C B, cui occurrat tangens A F. [a] erit F intra asymptotos: ducatur D F sectiones secans in G, K. [b] sitque C F. F B :: C L. L B; & connectatur A L M N. ergo ductæ F M, F N [c] sectiones contingent; eritque [d] proinde X G. G F :: X D. DF (ob sectionem A G M); & X K. K F :: X D. D F. [e] (propter sectionem A K N). [e] quare X G. G F :: XK. K F. *Q. E. A.*

a 25. 2.
b 10. 6.
c 1 hujus.
d 36. 1 hujus. & 16. 5.
e 11. 5.

Prop. XLVII.

Si hyperbole (D A C) unam (A B C) oppositarum sectionum (A B C, E F G) contingens, in alio puncto (C) secet; quæ ipsi DAC opponitur sectio (E F H) alteri oppositarum (E F G) non occurret præterquam in uno puncto. Fig. 310.

Occurrat punctis E, F; jungatúrque E F. Sitque primò E F tangenti A K parallela; ergo quæ bisecat ipsam E F, [a] diameter per A transit; sit hæc A L; perque C ducatur C B ad A K parallela; [b] bisecta est igitur utraque B C, D C in L. [c] *Q. E. A.*

a 34. 2 huj.
b 48. 1. huj.
c 9. ax.

Sin E F, A K conveniant (in K); ideóque E F, B C (in N); bisecet diameter A M ipsam E F, sectiones secans punctis X, O; per quæ ducantur contingentes X P, O R, [d] rectæ E F, ac proinde invicem parallelæ; eritque D N × N C. E N × N F [e] :: (A Pq. P Xq [f] :: A Rq. R Oq [e] ::) B N × N C. E N × N F: [g] quare D N × N C = B N × N C. [h] *Q. E. A.* Fig. 311.

d 34. 2 huj.
e 19. 3 huj.
f 4. & 22. 6.
g 9. 5.
h 9. ax.

Prop. XLVIII.

Si hyperbole (A C) unam (A B) oppositarum sectionum (A B, D E G) in uno puncto (A) contingat; quæ ipsi (A C) opponitur sectio (D E F) oppositarum alteri (D E G) non occurret ad plura puncta, quàm duo. Fig. 312. 313.

Si fieri potest, occurrat quoque in H; ducatúrque A K utramque sectionem A B, A C contingens, & conjungatur D E, quæ primò parallela sit ipsi A K. Bisecetur D E in L, & connectatur A L: [a] est hæc oppositarum diameter: ductâque H X G F ad D E parallelâ, erit X G [b] = (X H [b] =) X F. *Q. E. A.*

a 34. 2 huj.
b 10 def 1 h.
c 9. ax.

Sin

Sin D E non sit ad A K parallela, occurrat ei in K, reliquisque peractis ut prius, producta F H ipsi A K occurrat in R. quare G R × RH.
d 19. 3. *huj.* R Aq [d]:: (D K × K E. A Kq ::) F R × R H. R Aq. [e] ideóque G R ×
e 9. 5. RH = F R × R H. [c] *Q. E. A.*

Prop. XLIX.

Fig. 314. Si hyperbole (A B) utramque oppositarum sectionum (A,B) contingat, quæ ipsi opponitur sectio (E), nulli oppositarum (A, B) occurret.

Ducantur enim A D, B G, quæ contingant sectiones; [a] liquet has
a 25. 2. *huj.* intra asymptotos sectionis A B convenire. [b] ideóque asymptotis secti-
b 33. 2. *huj.* onis E non occurrere, sed eas continere, & multò magis sectionem E. Cùm igitur tangens A C [b] non occurrat sectioni B G, nec tangens B C [b] sectioni A D, neutri harum occurret sectio E. *Q. E. D.*

Prop. L.

Fig. 315. Si utraque oppositarum sectionum (A ,D) in uno puncto (A & D) contingant, ad easdem partes concava habens, in alio puncto non occurrent.

a 47. 4. *huj.* Si fieri potest, sectiones D occurrant in E; ergo sectiones A [a] non
b 39. 2. *huj.* occurrent præterquam in uno puncto A. ducantur contingentes A H,
c 10. *def.* 1. *b.* D H, junctæque A D sit parallela E B C, & per H ducatur H K diameter secunda sectionum oppositarum; [a] bisecabit hæc ipsam A D in K, [c] ideóque utramque E B, E C in L. *Q. E. A.*

Prop. LI.

Fig. 316. Si hyperbole (A C B) oppositarum sectionum unam (A D B) contingat in duobus punctis (A, B); quæ ipsi opponitur sectio (F) oppositarum alteri (E) non occurret.

Si fieri potest, occurrat in E, ducantúrque sectionum contingentes A G, B G; & connectantur A B, E G, & producta E G sectionibus
a 36. 1. *huj.* occurrat in C, D, rectæque A B in H. Erit igitur H D. D G [a]::(H E.
b 14. 5. *huj.* E G [a]::) H C. C G. ergo quum H D ⊐ H C, [b] erit D G ⊐ C G.
c 9 *ax.* [c] *Q. E. A.*

Prop.

Prop. LII.

Si hyperbole (A D) oppositarum sectionum unam (A) contingat (in A), convexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio (F) oppositarum alteri (B) non occurret. Fig. 317.

Ducatur enim A C tangens sectiones; [a] hæc neutri sectionum B,F occurret; sed inter ipsas cadet; ergo nec ipsæ sectiones occurrent. *Q. E. D.* a 33. 2 *hujus.*

Prop. LIII.

Oppositæ sectiones (A B C D, E F) oppositas (A B, C D) non secant in pluribus punctis, quàm quatuor.

Nam quum sectiones convexa habent sibi obversa, si 1°, sectio A B C D* secet utramque A B, C D in quatuor punctis (A, B, C, D), [a] liquet E F neutri reliquarum A B, C D occurrere. *1. Fig. 318. a 41. *hujus.*

Sin 2dò, sectio A B C sectionem A B* secet in duobus punctis (A, B,) ipsásque C D in uno E; non occurret ergo E F [b] ipsi C D, nec ipsi A B præterquam uno puncto; (si enim duobus, [c] ergo ei opposita A B C non omnino occurret alteri C D, contra hypoth.) *2. Fig. 319. b 39. *hujus.* c 41. *hujus.*

Sin 3°, Sectio A B C sectionem A B E secet punctis duobus A, B; [d] non occurret sectio E F sectioni D, nec sectioni A B E, præterquam duobus punctis. 3. Fig. 320. d 35. *hujus.*

Sin 4°, Sectio A B C D utramque A B, E F unico puncto secet, [e] nulli ipsarum occurret ipsa E F duobus punctis. 4. Fig. 321. e 40 *hujus.*

Sin Sectiones ad easdem partes concava habeant; & 5°, altera alteram in quatuor punctis (A, B, C, D) secet, [f] sectio EF neutri A B, C D occurret. Sin 6°, Sectio A B C alteri occurrat tribus punctis, [g] ipsa E F alteri in uno tantùm puncto occurret, idémque in reliquis. Nullo igitur modo oppositæ sectiones oppositis ad plura puncta convenient, quàm quatuor. 5. Fig. 322. 323. f 36. *hujus.* 6. Fig. 324. g 44. *hujus.*

Prop. LIV.

Si oppositæ sectiones (B C, E F) oppositas (A B, D) in uno puncto (B) contingant, non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura quàm duo. Fig. 325.

Habeant Sectiones convexa sibi invicem obversa, occurrátque primò Sectio B C ipsi D duobus punctis, C, D. [a] ergo Sectio E E neutri [a] A B, [b] C D occurret. a 39. *hujus.* b 52 *hujus.*

Sin 2ò, Sectio B C secet ipsam D semel in C, [c] ergo E F sectioni D, nusquam occurret, nec ipsi A B nisi in uno puncto (si enim duobus, Fig. 326. c 52 *hujus.*

[d] non

d 39 *hujus.* [d] non occurret B C ipsi D) contra hypothesin).

Fig. 327. Sin 3ò, Sectio B C non occurrat sectioni D, [e] nec E F ipsi D occurret, [f] ipsique A B occurret duobus tantùm punctis.

e 52 *hujus.*

f 35. *hujus.* Sin Sectiones ad easdem partes concava habeant, similis erit discursus; constabitque omninò propositum.

Prop. LV.

Fig. 328. Si Sectiones oppositæ (A B, C D) oppositas (A C, E F) contingant in duobus punctis, in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

a 49. *hujus.* Contingant primò in A C. [a] ergo Sectio E F nulli ipsarum occurret.

b 51. *hujus.* Secundò, contingant in A, B; [b] itaque rursus C D non occurret

Fig. 329. ipsi E F.

Fig. 330. Tertiò, contingat Sectio A C ipsam A B in A, & Sectio D ipsam

c 52. *hujus.* E F in F. [c] ergo nec Sectio EF Sectioni A B, nec Sectio C A ipsi D F occurret.

Fig. 331. Quartò, contingat A C ipsam A B in A, & E F ipsam D in E, habentes concava ad easdem partes, liquet ipsas neutiquam iu alio puncto

d 50 *hujus.* occurrere: quare omnino constat propositum.

LAUS DEO.
